

Université de Montréal

**Classification analytique des points fixes paraboliques
de germes antiholomorphes et de leurs déploiements**

par

Jonathan Godin

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Mathématiques

11 décembre 2020

Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

Cette thèse intitulée

Classification analytique des points fixes paraboliques de germes antiholomorphes et de leurs déploiements

présentée par

Jonathan Godin

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Iosif Polterovich

(président-rapporteur)

Christiane Rousseau

(directeur de recherche)

Egor Shelukhin

(membre du jury)

Mitsuhiro Shishikura

(examineur externe)

Résumé

On s'intéresse à la dynamique dans un voisinage d'un point fixe d'une fonction antiholomorphe d'une variable. Dans un premier temps, on cherche à décrire et à comprendre l'espace des orbites dans un voisinage d'un point fixe multiple, appelé point parabolique, et à explorer les propriétés géométriques préservées par les changements de coordonnée. En particulier, on résout le problème de classification analytique des points paraboliques. Résoudre ce problème consiste à définir un module de classification complet qui permet de déterminer si deux germes de difféomorphismes antiholomorphes sont analytiquement conjugués dans un voisinage de leur point fixe parabolique. On examine également les applications du module à différents problèmes : *i*) extraction d'une racine n -ième antiholomorphe, *ii*) existence d'une courbe analytique invariante sous la dynamique d'un germe antiholomorphe parabolique et *iii*) centralisateur d'un germe antiholomorphe parabolique.

Dans un second temps, on étudie les déploiements génériques d'un point fixe double, soit un point parabolique de codimension 1. Les questions sont de nature similaire, à savoir comprendre l'espace des orbites et les propriétés géométriques des déploiements. Afin de classifier les déploiements génériques, on déploie le module de classification pour les points paraboliques, ce qui permet d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour déterminer lorsque deux déploiements génériques sont équivalents.

Mots clés. Systèmes dynamiques discrets, fonctions antiholomorphes, points fixes paraboliques, classification, déploiements

Abstract

We are interested in the dynamics in a neighbourhood of a fixed point of an antiholomorphic function of one variable. First, we want to describe and understand the space of orbits in a neighbourhood of a multiple fixed point, called a parabolic point, and to explore the geometric properties preserved by changes of coordinate. In particular, we solve the problem of analytical classification of parabolic fixed points. To solve this problem, we define a complete modulus of classification that allows to determine whether two germs of antiholomorphic diffeomorphisms are analytically conjugate in a neighbourhood of their parabolic fixed point. We also consider the applications of the modulus to different problems: *i*) extraction of an n -th antiholomorphic root, *ii*) existence of an invariant real analytical curve under the dynamics of a parabolic antiholomorphic germ, and *iii*) centraliser of a parabolic antiholomorphic germ.

In the second part, we study generic unfoldings of a double fixed point, i.e. a parabolic point of codimension 1. The questions are similar in nature, namely to understand the space of orbits and the geometric properties of unfoldings. In order to classify generic unfoldings, the modulus of classification of the parabolic point is unfolded, thus providing the necessary and sufficient conditions to determine when two generic unfoldings are equivalent.

Keywords. Discrete dynamical systems, antiholomorphic functions, parabolic fixed point, classification, unfoldings

Table des matières

Résumé	v
Abstract	vii
Table des figures	xiii
Liste des sigles et des abréviations	xvii
Introduction	1
Première partie. Germes de difféomorphismes antiholomorphes paraboliques	7
Chapitre 1. Préliminaires	9
1.1. Rappels sur les germes de difféomorphismes holomorphes paraboliques	9
1.2. Propriétés des fonctions antiholomorphes	11
1.3. Étude des points fixes simples de fonctions antiholomorphes	14
Chapitre 2. Premier article. Analytic Classification of Germs of Parabolic Antiholomorphic Diffeomorphisms of Codimension k	17
2.1. Introduction	18
2.2. Antiholomorphic Parabolic Fixed Points	21
2.3. Properties of the Formal Normal Form	26
2.4. Fatou Coordinates	27
2.4.1. Rectifying Coordinates and sectors	27
2.4.2. Fatou Coordinates	30
2.5. Modulus of Analytic Classification	32
2.5.1. Remarks on the Écalle-Voronin Modulus	36
2.6. Space of Orbits and Classification Under Analytic Conjugacy	39
2.6.1. Description of the Space of Orbits	39

2.6.2.	The space of orbits of f	40
2.6.3.	Classification Under Analytic Conjugacy	42
2.7.	Applications of the Classification Theorem	44
2.7.1.	Embedding in a Flow or the Complex Conjugate of a Flow	44
2.7.2.	Antiholomorphic n -th Root Problem	44
2.7.3.	Germes with an Invariant Real Analytic Curve	48
2.7.4.	Centralizer in the Group of Holomorphic and Antiholomorphic Germes	51
Deuxième partie. Déformations de germes antiholomorphes paraboliques de		
codimension 1		57
Chapitre 3. Forme préparée		59
3.1.	Fonctions analytiques de variables réelles et complexes	60
3.2.	Forme préparée des déformations à un paramètre	66
3.2.1.	Forme préparée dans le cas antiholomorphe	67
3.2.2.	Diagramme de bifurcation	78
Chapitre 4. Module de classification et équivalence faible		81
4.1.	Coordonnées de Fatou	81
4.1.1.	Coordonnée temps	82
4.1.2.	Applications quasiconformes	90
4.1.3.	Construction des coordonnées de Fatou (cas holomorphe)	92
4.1.4.	Existence des coordonnées de Fatou (cas antiholomorphe)	96
4.2.	Module de classification	98
4.2.1.	Changements de carte	99
4.2.2.	Fonctions de transition	101
4.2.3.	Géométrie des orbites pour $\varepsilon < 0$	103
4.2.4.	Géométrie des orbites pour $\varepsilon > 0$	108
4.2.5.	Propriétés analytiques des fonctions de transition	109
4.2.6.	Définition du module de classification	112
4.2.7.	Équivalence faible	113
Chapitre 5. Équivalence forte		117
5.1.	Complexification du paramètre	117

5.2. Coordonnées de Fatou du point de vue de Lavaurs	119
5.2.1. Position des trous dans la coordonnée temps	120
5.2.2. Domaines de translation	120
5.2.3. Existence et unicité des coordonnées de Fatou du point de vue de Lavaurs pour le cas holomorphe	122
5.2.4. Dépendance du paramètre d'une famille de coordonnées de Fatou du point de vue de Lavaurs	122
5.2.5. Coordonnées de Fatou du cas antiholomorphe	126
5.2.6. Fonctions de transition et application de Lavaurs	129
5.3. Théorème d'équivalence forte	132
5.3.1. Démonstration du théorème d'équivalence forte	133
5.3.2. Notes additionnelles sur la dépendance des paramètres des coordonnées de Fatou	145
Conclusion	153
Bibliographie	155
Annexe A. Domaines de translation de Lavaurs continus en $\widehat{\varepsilon}$	157
Annexe B. Démonstration du corollaire 5.3.11	161

Table des figures

1	Dynamics of a holomorphic parabolic germ with topological invariant $k = 3$	19
2	An orbit of f jumping between two petals. An orbit of the second iterate $f^{\circ 2}$ will remain either in the upper petal or the lower petal.	20
3	Dynamics near the formal symmetry axis of $f(z) = \bar{z} + o(\bar{z})$ in <i>odd</i> codimension. One sector is attractive and the other repulsive; this yields the two possibilities above.	23
4	Dynamics near the formal symmetry axis of $f(z) = \bar{z} + o(\bar{z})$ in <i>even</i> codimension. The possibilities are: on the left, both sectors are repulsive (positive type) and, on the right, both are attractive (negative type).	23
5	The Riemann surface of the time coordinate Z . The hole in the middle correspond to the image of $\mathbb{C} \setminus D(0, r)$ in the z -coordinate, while a neighbourhood of $z = 0$ is sent to a neighbourhood of infinity. A curve going k times around the hole in the Z -coordinate will turn one time around ∞ in the z -coordinate.	28
6	A chart U_j on the Riemann surface with the vertical strip B_j	28
7	The particular case of $\dot{z} = z^4$. On the right, the sector U_0 in the Z_0 -coordinate, obtained from a strip (in dark gray). On the left, $S_0 = Z^{-1}(U_0)$ the sector in z , with the preimage of the strip (in dark gray).	29
8	Petals for the holomorphic map $f \circ f$. Dynamics inside a repulsive petal on the left. Dynamics inside an attracting petal on the right.	29
9	Ordering of the sectors for $k = 3$	29
10	On the left, an orbit of $\sigma \circ v^{\frac{1}{2}}$ in the z coordinate. The orbit jumps between the sectors S_j^v and S_{-j}^v . On the right, the same orbit is represented in the time coordinate; it is the orbit of $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$	30
11	Charts U_{j-1} and U_j on the time coordinate. They intersect on a region containing (in this case) an upper half-plane.	33

12	Direction of the transition functions $\{\xi_j\}_j$, where ξ_j is the expression of Ψ_j in the z -coordinates.....	34
13	Pentagon with 10 sectors and the transition functions, for codimension 5, with the symmetry axis of f in bold in (a) and (b).....	37
14	A fundamental domain obtained by $Z_0^{-1}(B_0)$ in the z -coordinate (in gray) and the sphere it represents	39
15	Space of orbits for $f \circ f$ of codimension 4	40
16	The space of orbits of f in codimension 4	41
17	The orbit of one sector by the subgroup H generated by two reflections (bold axes) in codimension 12.....	47
18	Mapping φ extended on $A \cup \gamma \cup B$	49
19	Triangle divided in two closed curves.....	50
20	Le diagramme de bifurcation si $b(0) \neq 0$	80
21	Surface de Riemann de la coordonnée temps près de la frontière du disque $D(0, r)$.	83
22	À droite, une feuille de la coordonnée temps pour $\varepsilon < 0$; à gauche, pour $\varepsilon > 0$; les pointillés sont les lieux où l'on change de feuille.....	83
23	Contour d'intégration.....	85
24	Contours d'intégration.....	86
25	Les droites horizontales dans une carte de la coordonnée temps envoyées sur les lignes de flot du champ (4.1.1) pour $\varepsilon > 0$	86
26	Bande verticale, domaine U_ε^+ et lignes de flot du champ (4.1.1) pour $\varepsilon > 0$, avec une région (gris foncé) en bijection avec S_ε^+	90
27	Bande verticale, domaine U_ε^+ et lignes de flot du champ (4.1.1) pour $\varepsilon < 0$	90
28	Schéma des fonctions et de leur domaine pour la construction d'une coordonnée de Fatou.....	94
29	Bande ouverte (en gris) à côté du trou fondamental et suite de points $G^{on}(Z_0)$...	96
30	Division du disque $D(0, r)$ en trois régions.....	99
31	Changements de carte et leur domaine dans la coordonnée temps.....	100
32	Fonction de transition ($\varepsilon > 0$).....	101

33	Fonctions de transition dans la coordonnée temps (en haut) et dans la coordonnée sur la sphère (vues dans le domaine de départ en bas) ($\varepsilon < 0$).	102
34	Premier retour dans un croissant de S^+	103
35	Application de premier retour.	104
36	Point dans le croissant de gauche associé au point de son orbite du croissant de droite.	106
37	Fonctions de transition et application de Lavaurs sur les sphères.	106
38	Espace des orbites de f_ε , où les flèches sur l'équateur indiquent la façon de recoller la frontière.	107
39	Fonction de transition d'un anneau $A \subset \mathbb{C}_+^*$ sur un anneau $A' \subset \mathbb{C}_-^*$	108
40	Bouteilles de Klein et fonction de transition.	109
41	Séparation de D_ε^* en deux domaines simplement connexes.	116
42	Bande oblique dans la coordonnée temps et son image en spirale dans la coordonnée z de départ pour $\varepsilon > 0$	119
43	Domaines de translation.	120
44	Exemples d'une droite admissible et de deux droites non admissibles.	121
45	Comparaison entre les domaines de translation obtenus lorsque ε tourne dans les sens horaire et antihoraire.	124
46	Secteur $\Omega_{\pi, 2\pi-\delta}$	124
47	Famille de domaines de translation paramétrée par $\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}$	125
48	Croissants pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$ et $\varepsilon = \frac{e^{i\pi/2}}{4}$ dans le cas de la forme normale, avec $b = 0$	130
49	Argument géométrique que $v \geq \tan(\alpha - \alpha')u$	139
50	Les deux « secteurs » S_ε^\pm pour $\arg \widehat{\varepsilon} = 0$ et leurs intersections en gris foncé : partant du haut du disque jusqu'à $-\sqrt{\widehat{\varepsilon}}$, S_ε^∞ ; allant de $-\sqrt{\widehat{\varepsilon}}$ à $\sqrt{\widehat{\varepsilon}}$, S_ε^L ; de $\sqrt{\widehat{\varepsilon}}$ jusqu'au bas du disque, S_ε^0	141
51	Les deux régions R_ε^\pm qui se projettent sur S_ε^\pm et leurs intersections en gris foncé, en utilisant la translation de Lavaurs pour ramener les deux régions sur la même coordonnée de Fatou (la ligne pointillée indique que l'on change de feuille).	141
52	Comme à la figure 50, mais pour $\arg \widehat{\varepsilon} = \pi$	141
53	Comme à la figure 51, mais pour $\arg \widehat{\varepsilon} = \pi$	141

54	Représentation de ℓ , ainsi que les bandes qui contiennent toutes les courbes $G_{\rho e^{i\theta}}(\ell)$ pour $\rho e^{i\theta} \in \Omega_\lambda$. (La figure pour $\hat{\ell}$ est similaire, mais avec une droite de pente négative.).....	144
55	Valeur maximal de $\arg(1 + b\sqrt{\varepsilon})$. Plus r' est petit plus le rayon du cercle diminue.	159
56	Droite ℓ et $\ell + 2$ dans le cas où $\arg \alpha_+$ est négatif, ainsi que les longueurs x et y qui permettent d'exprimer α_+ et la distance L entre ℓ et $\ell + 2$. (Le signe moins devant $\arg \alpha_+$ est pour représenter l'angle sur la figure comme une quantité positive.)...	159

Liste des sigles et des abréviations

f, f_ε	Un germe de difféomorphisme antiholomorphe qui dépend ou non de ε
τ_\pm	La dérivée de f_ε en $\pm\sqrt{\varepsilon}$
g, g_ε	Un germe de difféomorphisme holomorphe qui dépend ou non de ε
λ_\pm	Le multiplicateur de g_ε en $\pm\sqrt{\varepsilon}$
σ	La conjugaison complexe
σ_ℓ	La réflexion par rapport à la droite ℓ
T_C	La translation : $Z \mapsto Z + C$
ε	Un paramètre (habituellement réel et canonique)
$\widehat{\varepsilon}$	Le relèvement de ε sur le revêtement universel de $D(0, r) \setminus \{0\}$
Ψ_ε^U	Une fonction de transition au-dessus du trou fondamental pour $\varepsilon > 0$
$\Psi_\varepsilon^{0,\infty}$	Une fonction de transition au-dessous et au-dessus du trou fondamental pour $\varepsilon \leq 0$
$\Psi_{\widehat{\varepsilon}}^L$	Une fonction de transition du point de vue de Lavaurs qui dépend de $\widehat{\varepsilon}$
Z, Z_ε	La coordonnée temps qui dépend ou non de ε
W, W_ε	Une coordonnée de Fatou $W = \Phi(Z)$ qui dépend ou non de ε
Φ, Φ_ε	Un changement de coordonnée vers une coordonnée de Fatou

S^\pm	Un « secteur » du disque $D(0, r)$ de la coordonnée z
U^\pm, U_ε^\pm	Une carte de la coordonnée temps $U^\pm = Z^\pm(S^\pm)$ qui dépend ou non de ε
V^\pm, V_ε^\pm	Le domaine d'une coordonnée de Fatou $V^\pm = \Phi_\pm(U^\pm)$ qui dépend ou non de ε
$\Omega_{\theta_0, \gamma}$	Un secteur ouvert de l'espace du paramètre ε ou $\widehat{\varepsilon}$ centré en θ_0 , dont l'ouverture est de grandeur $\gamma > 0$ et ayant son sommet à l'origine (le sommet n'est pas inclus)
E	Le recouvrement universel $W \mapsto \exp(-2i\pi W)$ de $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$

Introduction

Le sujet de cette thèse est l'étude et la classification des germes de difféomorphismes antiholomorphes dans le voisinage d'un point fixe parabolique, c'est-à-dire un point fixe multiple, ainsi que celle des déploiements des points fixes doubles. La thèse se place donc à l'intersection des systèmes dynamiques complexes et de la théorie des singularités.

Sur un domaine $U \subseteq \mathbb{C}$, une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ définit un *système dynamique discret*¹ à l'aide de l'itération. Afin de comprendre la dynamique de f , il est important d'étudier ses *points fixes*, aussi appelés points d'équilibre, et ses *orbites périodiques*, car celles-ci régissent dans une certaine mesure le reste de la dynamique. Les singularités les plus dégénérées sont souvent décrites comme les centres organisateurs de la dynamique. Un premier pas pour comprendre la dynamique *locale* est de répondre à la question suivante.

Si f_1 et f_2 ont chacune un point fixe en z_0 , existe-t-il un changement de coordonnée h sur un voisinage de z_0 qui conjugue f_1 sur f_2 , c'est-à-dire un h tel que $f_2 = h \circ f_1 \circ h^{-1}$?

Par exemple, une manière de résoudre le problème est de trouver une forme normale convergente, c'est-à-dire un modèle avec lequel comparer les systèmes. Une conjugaison envoie les orbites de f_1 sur les orbites de f_2 , puisque $f_2^{\circ n} = h \circ f_1^{\circ n} \circ h^{-1}$, donc les deux systèmes ont la même dynamique vue dans des coordonnées différentes. Cette question reflète donc l'esprit des problèmes que la thèse tente de résoudre. Bien sûr les questions pour la thèse seront plus spécifiques ou auront des saveurs un peu différentes.

On demande habituellement une certaine régularité sur f , selon le contexte, par exemple la continuité, la différentiabilité ou l'holomorphicité, et des changements de coordonnée respectant cette régularité. Dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse exclusivement aux *fonctions antiholomorphes* : les fonctions qui dépendent de la variable \bar{z} plutôt que z . Ces fonctions peuvent être vues comme la composition d'une fonction holomorphe par une réflexion et cette propriété est intrinsèque, c'est-à-dire que l'antiholomorphicité est préservée par les changements de coordonnée holomorphes.

1. Certains auteurs demandent plutôt $f: U \rightarrow U$ pour pouvoir itérer f à l'infini. Dans notre cas, si $f^{\circ N}(z)$ n'est plus dans U pour un certain N , alors l'orbite de z s'arrête à la $(N - 1)$ -ième itérée.

On suppose que f est antiholomorphe et qu'elle possède un point fixe isolé en z_0 . Puisque l'on s'intéresse seulement à un voisinage de z_0 , on travaille avec le germe de la fonction f en z_0 , que l'on notera également f . On peut d'abord classer les germes selon la *multiplicité* de leur point fixe, un invariant topologique. Un point fixe de multiplicité n correspond à une solution de multiplicité n de l'équation $f(z) - z = 0$ et se comprend comme la coalescence de k points fixes et de $n - k$ points provenant d'orbites périodiques. La classification des points z_0 simples est élémentaire et est traitée à la section 1.1, alors que le cas où z_0 est multiple est beaucoup plus subtil. Dans le cas antiholomorphe, un point fixe multiple est appelé *point parabolique*.

On cherche à résoudre le *problème de classification analytique* pour les germes antiholomorphes ayant un point fixe parabolique. Dans le contexte de cette thèse, on définit ce problème par les deux questions suivantes :

1. (*Classification*) Quand deux germes antiholomorphes sont-ils analytiquement conjugués dans un voisinage de leur point fixe parabolique ?
2. (*Réalisation*) Quel est l'ensemble (l'espace) des classes d'équivalence et comment peut-on décrire ces classes d'équivalence ?

Le problème renferme une grande subtilité ; il se trouve à la frontière entre la théorie formelle et la théorie analytique. En fait, la classification *formelle* est simple : tout germe ayant un point fixe parabolique de multiplicité donnée est conjugué par une série formelle à une forme normale unique qui dépend d'un nombre réel b , un invariant formel. Une série formelle est une série qui n'est pas forcément convergente, on parle alors d'une *conjugaison formelle*. Une *forme normale* est un germe ayant un point fixe parabolique qui a une dynamique bien comprise ; c'est un modèle auquel on compare d'autres germes. Lorsqu'un germe est analytiquement conjugué à sa forme normale, sa dynamique est parfaitement comprise. On pose alors la question suivante, qui relève à la fois des problèmes de classification et de réalisation.

Question 1. Sous quelles conditions la conjugaison formelle d'un germe à sa forme normale est-elle convergente ? Autrement dit, quels sont les germes analytiquement conjugués à leur forme normale ?

Ensuite, il est clair que deux germes analytiquement conjugués ont la même forme normale, mais on ne peut pas exclure que deux germes qui ne sont pas analytiquement conjugués à cette forme normale soient tout de même analytiquement conjugués entre eux.

Question 2. Sous quelles conditions deux germes qui ont chacun un point fixe parabolique sont-ils analytiquement conjugués ?

On verra au chapitre 2 que les conditions sont très rigides et que le nombre de classes d'équivalence est très grand. Deux germes génériques ne sont presque jamais analytiquement conjugués entre eux ou à leur forme normale.

Afin de répondre à ces questions, on sera guidé par la classification analytique des points fixes paraboliques holomorphes, un classique de la littérature, car la seconde itérée de f est holomorphe. Cette observation a une très large portée, en particulier si l'on remarque qu'une conjugaison entre deux germes antiholomorphes devra aussi être une conjugaison entre deux germes holomorphes.

Le problème de classification analytique pour les germes holomorphes a été résolu par les travaux d'Écalte [7] et de Voronin [19]. Un module de classification est associé à chaque germe holomorphe ayant un point fixe parabolique. Il renferme l'information topologique, formelle et géométrique de la dynamique. Deux germes holomorphes sont analytiquement conjugués si et seulement s'ils ont le même module.

La partie topologique du module correspond à la multiplicité du point fixe et la partie formelle est donnée par un nombre complexe b associé à la forme normale du germe. La dernière partie du module est une mesure de l'obstruction à conjuguer analytiquement le germe à sa forme normale. En pratique, on montre que le germe est analytiquement conjugué à sa forme normale sur des secteurs qui recouvrent un voisinage de l'origine et que ces conjugaisons sont presque uniques. L'information géométrique correspond alors aux fonctions de transition entre les secteurs. Ces fonctions de transition mesurent de quelle façon la dynamique du germe diffère de celle de la forme normale.

Question 3. Un module de classification complet existe-t-il pour les germes antiholomorphes ayant un point fixe parabolique ?

Le module de classification complet sera établi à la section 2.5. On discutera aussi des applications du module à la section 2.7. Par exemple, on a mentionné plus tôt que $g := f \circ f$ est holomorphe et possède un point parabolique ; il est alors naturel de se poser la question inverse, c'est-à-dire en partant d'un g holomorphe, peut-on trouver f antiholomorphe tel que $g = f \circ f$? On appelle f une *racine carrée antiholomorphe* de g . Posséder une racine antiholomorphe est une propriété de la classe de conjugaison de g , donc on devrait pouvoir lire la réponse dans le module de classification de g . Dans le cas holomorphe, on le nomme le *module d'Écalte-Voronin*. Ce problème se généralise de deux façons. Le problème d'extraction d'une racine carrée correspond à chercher une solution antiholomorphe à l'équation $f \circ f = g$, on peut donc chercher les racines n -ièmes, c'est-à-dire les solutions de $f^{\circ n} = g$. On se rend compte que n doit être pair, sinon $f^{\circ n}$ est antiholomorphe. On peut aussi considérer le problème pour f , à savoir s'il existe une solution à l'équation $f_1^{\circ n} = f$ pour n impair, où f_1 est antiholomorphe.

- Question 4.** 1. Sous quelles conditions un germe holomorphe ayant un point parabolique possède-t-il une racine n -ième antiholomorphe ?
2. Sous quelles conditions un germe antiholomorphe ayant un point parabolique possède-t-il une racine n -ième antiholomorphe ?

Les racines antiholomorphes de f commutent avec f . Les itérées de f et de ses racines commutent aussi avec f . Y a-t-il d'autres germes qui commutent avec f ? Le module de classification permet de répondre à cette question.

Question 5. Peut-on décrire l'ensemble des germes holomorphes ou antiholomorphes ayant un point parabolique qui commutent avec un germe holomorphe ou antiholomorphe donné ayant un point parabolique ?

Un contexte riche connexe au thème de la thèse et où l'étude locale est utilisée est celui de l'itération des *antipolynômes*, les polynômes de la variable \bar{z} . Les points fixes paraboliques se retrouvent naturellement dans ces systèmes. L'exemple le plus simple ayant un point fixe parabolique est l'antipolynôme $z \mapsto \bar{z} + \bar{z}^2$. Un exemple un peu plus surprenant est l'antipolynôme de *degré deux* $p(z) = \bar{z}^2 - \frac{3}{4}$ qui possède un point fixe de multiplicité 3 en $z = -\frac{1}{2}$! Il est impossible pour un polynôme holomorphe de degré 2 d'avoir un point fixe de multiplicité complexe 3, ce qui montre que l'antiholomorphie est un phénomène à la frontière du réel. Afin de comprendre ces systèmes dynamiques, plutôt que d'étudier un à un les antipolynômes de degré deux, on a avantage à étudier la famille des classes de conjugaison des antipolynômes $p_c(z) = \bar{z}^2 + c$, où $c \in \mathbb{C}$ est un paramètre. Il y a plusieurs travaux sur les familles $z \mapsto \bar{z}^k + c$, comme ceux de Nakane et Schleicher [16], Mukherjee, Nakane et Schleicher [15], Hubbard et Schleicher [9] et Inou et Mukherjee [12]. Leurs questions sont de nature globale, ils s'intéressent plutôt à un objet important dans l'espace des paramètres nommé un *multicorne* ou un *tricorne* lorsque $k = 2$.

Dans la deuxième partie de la thèse, on introduira un paramètre complexe afin de déployer un point fixe parabolique de codimension 1 (un point fixe double). On s'intéresse encore au comportement local. Pour simplifier, on suppose que f possède un point fixe parabolique à l'origine. On étudiera les *déformations* de f , c'est-à-dire les familles de germes $\{f_\varepsilon\}_\varepsilon$ tel que $f_0 = f$. On suppose de plus que la famille est *générique*, donc qu'elle dépend de ε de sorte que $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \Re \varepsilon} \neq 0$ en $(\varepsilon, z) = (0, 0)$. On s'attend à ce que le point parabolique se scinde pour les valeurs non nulles de ε , soit en deux points fixes simples ou en une orbite périodique de période deux. En réalité, on trouve une courbe réelle analytique dans l'espace des paramètres $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ sur laquelle le point fixe reste parabolique. On explique ce phénomène

2. La dérivée est seulement par rapport à la partie réelle, car dans le cas antiholomorphe, même si on a que $\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}(0)$ est inversible, il est tout de même possible que $\frac{\partial}{\partial \Im \varepsilon} f_0 \circ f_0(0) = 0$. Ceci sera exploré plus en profondeur au chapitre 3.

par le fait que la *condition* pour être parabolique est en quelque sorte « incomplète » : on a $|\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(0)| = 1$, sans condition sur la partie angulaire. C'est donc un phénomène de codimension réelle 1, par opposition au cas holomorphe qui est de codimension complexe 1. Ceci sera confirmé à la section 3.2.1, où l'on trouve un paramètre *réel* canonique, qui est intrinsèque. Ce paramètre facilite grandement l'étude des déformations, car il permet de déterminer une *forme préparée* pour la déformation, autrement dit une forme qui dépend du paramètre canonique et qui est privilégiée pour « comparer » les déformations entre elles. On décrira aussi le diagramme de bifurcation à l'aide de la forme préparée.

Même avec le diagramme de bifurcation, l'étude est loin d'être terminée. Le diagramme de bifurcation donne une idée de la dynamique pour chaque valeur fixée du paramètre, mais on veut aussi comparer les déformations génériques entre elles. Elles seront comparées selon une relation d'équivalence suivant deux règles de base : deux déformations f_{ε_1} et f_{ε_2} de f sont équivalentes si

1. (conjugaison) il existe une application $(\varepsilon_1, z_1) \mapsto (\varphi(\varepsilon_1), h_{\varepsilon_1}(z_1))$ telle que $h_{\varepsilon_1} \circ f_{\varepsilon_1} \circ h_{\varepsilon_1}^{-1} = f_{\varphi(\varepsilon_1)}$;
2. (régularité) l'application $\varphi: \varepsilon_1 \mapsto \varepsilon_2$ est régulière, h_{ε_1} est holomorphe en z_1 , inversible et dépend de ε_1 de façon régulière et le domaine de h_{ε_1} ne dépend pas ε_1 .

La régularité dépend du contexte. Pour la thèse, la régularité demandée sera habituellement l'analyticité réelle. Dans ce cas, on parlera d'*équivalence forte*. On utilisera aussi une autre version, dite *équivalence faible*, où l'on demande l'analyticité réelle sauf en $\varepsilon = 0$ et la continuité en $\varepsilon = 0$.

L'existence du paramètre canonique et de la forme préparée simplifient grandement le problème de classification. En effet, le paramètre canonique est préservé par les changements de coordonnées, donc il est suffisant de comparer les formes préparées des déformations avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ dans la description de l'équivalence. Ceci est loin de suffire pour terminer la classification.

Question 6. Sous quelles conditions deux déploiements génériques à un paramètre réel de difféomorphismes antiholomorphes paraboliques de codimension 1 sont-ils faiblement équivalents ?

Pour répondre à cette question, on déploie l'invariant formel pour obtenir une fonction qui dépend du paramètre canonique, et l'invariant géométrique pour obtenir une classe d'équivalence de familles à un paramètre de fonctions de transition. On associe ainsi un module de classification à chaque déformation de f et deux déformations sont faiblement équivalentes exactement lorsqu'elles ont le même module.

Après avoir exploité ces différents invariants, il est naturel de se demander s'il y a d'autres obstructions qui préviennent l'obtention de l'équivalence forte entre deux déformations de f .

Question 7. Si deux déformations de f sont faiblement équivalentes, alors sont-elles fortement équivalentes ?

L'un des derniers résultats de la thèse consiste à répondre à cette question par l'affirmative. La réponse s'obtient en complexifiant le paramètre canonique et en adaptant les outils du cas holomorphe au cas antiholomorphe. De façon générale, plusieurs techniques utilisées dans la thèse sont inspirées de celles utilisées dans le cas holomorphe. Ceci n'est pas très surprenant si on se rappelle que l'itérée seconde de f ou de f_ε est holomorphe. Ainsi, une classification de f ou de f_ε doit être cohérente avec celle existante pour $f \circ f$ ou $f_\varepsilon \circ f_\varepsilon$ respectivement.

La thèse est structurée en deux parties. La première partie porte sur les points fixes paraboliques de germes antiholomorphes et sur le problème de classification analytique. La seconde partie porte sur le déploiement d'un point fixe parabolique de multiplicité deux (on dit aussi de codimension 1). On s'intéresse alors au problème de classification analytique des déploiement du point fixe et au digramme de bifurcation.

La première partie est divisée en deux chapitres comme suit. Au chapitre 1, on fait un bref survol de résultats connus sur les points paraboliques de germes holomorphes. Ensuite, on passe aux propriétés des fonctions antiholomorphes et on discute de généralités sur les points fixes de fonctions antiholomorphes.

Le chapitre 2 correspond à l'article. Son but est de répondre aux questions 1 à 5 et de décrire localement la dynamique près d'un point fixe antiholomorphe parabolique. On s'intéresse aux points de multiplicité de tout ordre.

La deuxième partie est divisée en trois chapitres. Elle porte sur les déploiements de points fixes de codimension 1 seulement (points fixes doubles). Le chapitre 3 introduit d'abord les fonctions qui dépendent de variables réelles et de variables complexes de façon analytique et holomorphe respectivement. Ensuite, on présente la forme préparée et le paramètre canonique des déploiements génériques, ainsi que le diagramme de bifurcation.

Le chapitre 4 introduit la coordonnée temps, ensuite la normalisation sectorielle, c'est-à-dire les coordonnées de Fatou, et les fonctions de transition. Celles-ci ont aussi été introduites par Inou et Muckerjee [12]. On décrit l'espace des orbites de f_ε et on introduit le module de classification. On termine le chapitre avec le théorème d'équivalence faible. On répond ainsi à la question 6.

Le dernier chapitre, le chapitre 5, énonce et démontre la version forte du théorème d'équivalence ce qui répond à la question 7.

Première partie

**Germes de difféomorphismes antiholomorphes
paraboliques**

Chapitre 1

Préliminaires

Ce court chapitre sert à introduire quelques notions bien connues sur les germes de difféomorphismes holomorphes qui ont un point fixe, à définir les fonctions antiholomorphes et à discuter des propriétés élémentaires de ces dernières. La section 1.1 présente brièvement les points fixes simples et les points paraboliques dans le cas d'un germe de difféomorphisme holomorphe. La section 1.2 présente les fonctions antiholomorphes et la section 1.3 porte sur les points fixes simples d'un germe de difféomorphisme antiholomorphe.

Le sujet d'intérêt est le point fixe parabolique d'un germe antiholomorphe. Il fera l'objet du chapitre 2.

1.1. Rappels sur les germes de difféomorphismes holomorphes paraboliques

Soit U un domaine (ouvert connexe) de \mathbb{C} et soit $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Le but est de comprendre la dynamique obtenue par itération de g . On s'intéressera particulièrement au comportement local ; on étudiera donc les germes de fonctions ayant un point fixe. On notera un germe g au point z_0 par $g: (\mathbb{C}, z_0) \rightarrow \mathbb{C}$. Lorsque z_0 est un point fixe de g , on notera le germe $g: (\mathbb{C}, z_0) \rightarrow (\mathbb{C}, z_0)$.

Définition 1.1.1. Deux germes $g_j: (\mathbb{C}, z_0) \rightarrow (\mathbb{C}, z_0)$, $j = 1, 2$, sont analytiquement conjugués s'il existe un germe de difféomorphisme holomorphe $h: (\mathbb{C}, z_0) \rightarrow (\mathbb{C}, z_0)$ qui conjugue g_1 sur g_2

$$g_2 = h \circ g_1 \circ h^{-1}.$$

Ils sont formellement conjugués si h est donné par une série formelle centrée en z_0 .

Les conjugaisons analytique et formelle sont des relations d'équivalence. La première implique la deuxième et c'est cette première que l'on souhaite comprendre. Comme une conjugaison entre g_1 et g_2 envoie les orbites de g_1 sur les orbites de g_2 , les germes dans

une même classe d'équivalence ont la même dynamique. On veut ainsi décrire les classes d'équivalence de germes.

En effectuant la même translation dans le domaine et le codomaine, on peut déplacer un point fixe en z_0 de g où l'on veut. Ainsi, on ramène le point fixe à l'origine par $T_{-z_0} \circ g \circ T_{z_0}$, où T_{z_0} est la translation

$$T_{z_0}(z) = z + z_0.$$

On travaillera toujours avec un germe $g: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ pour le reste de la thèse.

Le résultat suivant est bien connu.

Proposition 1.1.2 ([4]). *Soit $g: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe holomorphe qui fixe 0. On pose $\lambda = g'(0)$. Si $|\lambda| \neq 0, 1$, alors g est linéarisable, c'est-à-dire que g est analytiquement conjugué à $\zeta \mapsto \lambda\zeta$. Si $\lambda = 0$, alors g est conjugué à $\zeta \mapsto \zeta^p$, où $p > 1$ est un entier tel que $g^{(j)}(0) = 0$ pour $j = 1, \dots, p-1$ et $g^{(p)}(0) \neq 0$.*

Dans le cas où $|\lambda| \neq 0, 1$, toute classe d'équivalence peut être représentée par le multiplicateur λ du point fixe. Ainsi l'ensemble des classes d'équivalence est en bijection avec

$$\{\lambda : |\lambda| \neq 0, 1\},$$

ce qui complète la classification. De plus, l'ensemble des classes d'équivalence pour le cas $\lambda = 0$ est en correspondance avec $\{\zeta \mapsto \zeta^p \mid p \in \mathbb{N}, p \geq 2\}$.

Ceci termine l'analyse des points fixes simples. Pour les points fixes multiples, c'est-à-dire lorsque $|\lambda| = 1$, on s'intéresse seulement au cas où $\lambda = 1$.

Définition 1.1.3. *Soit $g: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de difféomorphisme holomorphe qui se développe à l'origine en*

$$g(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots.$$

Le point fixe $z = 0$ est dit parabolique lorsque $g'(0) = a_1 = 1$ et $g \neq id$. On dira que le germe est parabolique dans ce cas. On dit que le germe est de codimension k lorsque $a_j = 0$ pour $j = 2, \dots, k$ et a_{k+1} est non nul.

La codimension exprime le nombre de conditions imposées au germe. En codimension 1, on demande que $a_1 = 1$ et $a_2 \neq 0$; en codimension 2, que $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ et $a_3 \neq 0$ et ainsi de suite. La codimension exprime aussi la multiplicité du point fixe; en codimension k , le point fixe est de multiplicité $k+1$. C'est un invariant topologique. Un germe parabolique de codimension k est topologiquement équivalent au temps-1 du champ $\dot{z} = z^{k+1}$.

La classification par conjugaison formelle dépend de cet invariant topologique, mais aussi d'un nombre complexe, que l'on appelle l'*invariant formel*. La proposition suivante est bien connue.

Proposition 1.1.4 ([20] Théorème 9.26). *Soit $g: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe parabolique de codimension k de la forme*

$$g(z) = z + a_{k+1}z^{k+1} + a_{k+2}z^{k+2} + \cdots + a_{2k+1}z^{2k+1} + o(z^{2k+1}).$$

1. *Il existe un changement de coordonnée polynomial p tel que*

$$p \circ g \circ p^{-1}(w) = w + w^{k+1} + (1 - b)w^{2k+1} + o(w^{2k+1}), \quad (1.1.1)$$

pour un certain $b \in \mathbb{C}$. Ce nombre b est un invariant : tout changement de coordonnée formel qui préserve le coefficient des termes w^j , pour $j = 0, \dots, 2k$, de la forme (1.1.1) préserve aussi $1 - b$, le coefficient de w^{2k+1} . On appelle b l'invariant formel de g . On dira que g est sous forme prénormale lorsqu'il est sous la forme de l'équation (1.1.1) pour un certain b .

2. *Si b est l'invariant formel de g , alors g est formellement équivalent à v^1 , le temps-1 du champ*

$$\dot{z} = v(z) := \frac{z^{k+1}}{1 + bz}. \quad (1.1.2)$$

On appelle v^1 la forme normale de g .

La proposition permet de compléter la classification formelle des germes paraboliques. Pour chaque germe g , on associe le couple $(k, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$ qui est formé de la codimension de g et de son invariant formel. Tous les germes g qui ont le même couple (k, b) sont formellement conjugués au temps-1 du champ $\dot{z} = \frac{z^{k+1}}{1+bz}$ et donc ils sont formellement conjugués entre eux. L'ensemble des classe d'équivalence sous la conjugaison formelle est en correspondance avec $\mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$.

Pour obtenir la classification analytique, il manque l'invariant géométrique. Cet invariant est plus compliqué à obtenir, donc on le repousse au chapitre 2.

1.2. Propriétés des fonctions antiholomorphes

Comme on le sait, la partie linéaire d'une fonction holomorphe, lorsqu'elle est non dégénérée, est la composition d'une rotation et d'une dilatation, ce qui est équivalent à demander les équations de Cauchy-Riemann. Ceci entraîne aussi le caractère conforme des fonctions holomorphes univalentes. Pour une fonction antiholomorphe, la partie linéaire, lorsqu'elle est non dégénérée, sera la composition d'une rotation, d'une réflexion et d'une dilatation. Ceci entraîne un caractère « anti-conforme » et la version correspondante des équations de Cauchy-Riemann.

La section introduira les fonctions antiholomorphes et quelques unes de leurs propriétés. À la section 1.3, on passera à l'étude de leur points fixes.

On note la conjugaison complexe par

$$\sigma(z) = \bar{z}. \quad (1.2.1)$$

On utilise les notations suivantes pour les opérateurs différentiels

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Dans cette notation, les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Le lemme suivant exprime les règles de dérivation en chaîne pour ces opérateurs.

Lemme 1.2.1 (Dérivation en chaîne). *Soit $U, V, W \subseteq \mathbb{C}$ des ouverts et soit $f: W \rightarrow U$ et $g: U \rightarrow V$ deux fonctions \mathbb{R}^2 -différentiables en $z \in W$ et en $w = f(z) \in U$ respectivement. Alors*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(g \circ f)(z) &= \frac{\partial g}{\partial w}(w) \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(w) \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)}; \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(g \circ f)(z) &= \frac{\partial g}{\partial w}(w) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(w) \overline{\frac{\partial f}{\partial z}(z)}. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit h dans l'espace tangent en z . D'une part, la différentielle de $g \circ f$ en z se décompose en une application \mathbb{C} -linéaire et $\overline{\mathbb{C}}$ -linéaire sur l'espace tangent :

$$d(g \circ f)(z)(h) = (g \circ f)_z(h) + (g \circ f)_{\bar{z}}(\bar{h}).$$

D'autre part, la dérivation en chaîne habituelle de \mathbb{R}^2 donne

$$\begin{aligned} d(g \circ f)(z)(h) &= dg(w) \circ df(z)(h) \\ &= (g_w + g_{\bar{w}}) \circ (f_z + f_{\bar{z}})(h) \\ &= g_w(f_z(h)) + g_{\bar{w}}(\overline{f_{\bar{z}}(\bar{h})}) + g_w(f_{\bar{z}}(\bar{h})) + g_{\bar{w}}(\overline{f_z(h)}). \end{aligned}$$

On obtient les deux équations à partir des parties \mathbb{C} -linéaire et $\overline{\mathbb{C}}$ -linéaire des deux expressions équivalentes de $d(g \circ f)(z)$. \square

Proposition 1.2.2. *Soit U un domaine de \mathbb{C} et soit $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et \mathbb{R}^2 -différentiable. Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. $\sigma \circ f$ est holomorphe ;
2. $f \circ \sigma$ est holomorphe ;
3. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ sur U ;
4. $f(z)$ possède un développement en série convergente autour de chaque $z_0 \in U$ de la forme

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial \bar{z}^n}(z_0) (\bar{z} - \bar{z}_0)^n$$

pour z dans un disque de convergence $D(z_0, R)$, où $R > 0$.

Remarque 1.2.3. Le disque de convergence maximal correspond au disque $D(z_0, R)$ avec R le plus grand nombre pour lequel $D(z_0, R) \subset U$.

Démonstration. 1. \Leftrightarrow 3.) Par le lemme 1.2.1, on a $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\sigma \circ f)(z) = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}(z)}$. Il suit que $\sigma \circ f$ satisfait aux équations de Cauchy-Riemann si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

2 \Leftrightarrow 3) Il suit immédiatement du lemme 1.2.1 que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ \sigma) = \frac{\partial f}{\partial z}$, donc $f \circ \sigma$ est holomorphe si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ sur U .

1 \Rightarrow 4) $\sigma \circ f$ est holomorphe et possède donc un développement en série convergente en terme de z autour de tout point z_0

$$(\sigma \circ f)(z) = (\sigma \circ f)(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n (\sigma \circ f)}{\partial z^n}(z_0) (z - z_0)^n.$$

On obtient la formule en composant à gauche par σ et en remarquant que

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}(\sigma \circ f)(z) = \overline{\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} f(z)}.$$

Cette dernière équation se montre par induction en utilisant le lemme 1.2.1.

4 \Rightarrow 3) Comme la série en z_0 est convergente, on peut échanger l'ordre de la dérivée et de la série sur tout compact du disque de convergence, ce qui permet de conclure que $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ sur un voisinage de z_0 . \square

Définition 1.2.4. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est antiholomorphe si elle satisfait à l'une des conditions de la proposition 1.2.2.

Remarque 1.2.5. La condition 3 de la proposition 1.2.2 est indépendante de la droite réelle plongée dans \mathbb{C} et de l'application σ qui lui est associée.

Comme dernières remarques, on obtient aussi les propriétés suivantes qui seront bien commodes, particulièrement le point 3, car il sera souvent utile de travailler dans différentes coordonnées.

Corollaire 1.2.6. Soit f, g et h trois fonctions que l'on peut composer sur un domaine.

1. Si f et g sont antiholomorphes, alors $f \circ g$ est holomorphe.
2. Si h est holomorphe et f est antiholomorphe, alors $f \circ h$ et $h \circ f$ sont antiholomorphes.
3. En particulier, l'antiholomorphie est préservée par les changements de coordonnées analytiques : si f est antiholomorphe et h est un difféomorphisme holomorphe, alors $h \circ f \circ h^{-1}$ est antiholomorphe.

Les points 1 et 2 se démontrent directement en utilisant le lemme 1.2.1. On obtient le point 3 en appliquant deux fois le point 2.

Enfin, la proposition suivante sera aussi utile. C'est un analogue de la singularité apparente pour les fonctions antiholomorphes.

Proposition 1.2.7 (Singularité apparente version antiholomorphe). *Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $P \in U$ un point et $f: U \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction antiholomorphe. Si f est bornée sur un disque $D(P, r) \setminus \{P\} \subset U$, $r > 0$, alors f se prolonge en une fonction $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{C}$ antiholomorphe, c'est-à-dire $\tilde{f}(z) = f(z)$ pour tout $z \in U \setminus \{P\}$.*

Démonstration. Puisque $\sigma \circ f$ est une fonction holomorphe sur $U \setminus \{P\}$ et qu'elle est bornée sur un voisinage de P , elle s'étend en une fonction holomorphe $g: U \rightarrow \mathbb{C}$. Le prolongement recherché de f est $\tilde{f} = \sigma \circ g$, car pour $z \neq P$, on a $g(z) = \sigma \circ f(z)$, d'où $\tilde{f}(z) = f(z)$. \square

On termine la section en remarquant que plusieurs des théorèmes de l'analyse complexe ont un analogue pour les fonctions antiholomorphes et peuvent se démontrer en utilisant le fait que $\sigma \circ f$ ou $f \circ \sigma$ sont holomorphes. Ces théorèmes ne seront pas utilisés pour la suite, donc ils ne sont pas inclus dans cette section.

1.3. Étude des points fixes simples de fonctions antiholomorphes

Soit f un germe de fonction antiholomorphe qui fixe un point z_0 . Comme pour le cas holomorphe, on peut effectuer une translation dans le domaine et le codomaine pour ramener z_0 à l'origine. Dans le cas simple où la dérivée $\lambda = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(0)$ est différente de 0 et 1 en norme, il est possible de linéariser f , comme dans le cas holomorphe. Les classes d'équivalence sont « plus grandes » que celles du cas holomorphe.

Proposition 1.3.1. *Soit $f: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe antiholomorphe. On pose $\lambda = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(0)$. Si $|\lambda| \neq 0, 1$, alors f est analytiquement équivalent à $|\lambda|\sigma: z \mapsto |\lambda|\bar{z}$.*

Démonstration. Comme $f \circ f$ est holomorphe, il existe un changement de variable $w = h(z)$ tel que $h \circ f \circ f \circ h^{-1}(w) = |\lambda|^2 w$. On pose $\tilde{f}(w) = h \circ f \circ h^{-1}(w)$. Supposons que \tilde{f} a le développement en série de puissances suivant

$$\tilde{f}(w) = b_1 \bar{w} + b_2 \bar{w}^2 + \dots$$

On sait que \tilde{f} satisfait à l'équation $\tilde{f} \circ \tilde{f}(w) = |\lambda|^2 w$, donc si on développe la composition $\tilde{f} \circ \tilde{f}$, on obtient

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 w &= \tilde{f} \circ \tilde{f}(w) \\ &= b_1(\bar{b}_1 w + \bar{b}_2 w^2 + \dots) + b_2(\bar{b}_1 w + \bar{b}_2 w^2 + \dots)^2 + \dots \end{aligned}$$

On a ainsi $|b_1|^2 = |\lambda|^2$ et $b_1 \bar{b}_2 + b_2 \bar{b}_1^2 = 0$. Cette dernière équation admet comme seule solution $b_2 = 0$, puisque $|b_1| = |\lambda| \neq 1$. Ensuite, par induction, si $b_k = 0$ pour $k = 2, 3, \dots, n$,

alors on a

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 w &= \tilde{f} \circ \tilde{f}(w) \\ &= b_1(\overline{b_1} w + \overline{b_{n+1}} w^{n+1} + \dots) + b_{n+1}(\overline{b_1} w + \overline{b_{n+1}} w^{n+1} + \dots)^{n+1} + \dots \end{aligned}$$

et donc $b_1 \overline{b_{n+1}} + b_{n+1} \overline{b_1}^{n+1} = 0$. La seule solution de cette équation est $b_{n+1} = 0$ puisque b_1 satisfait à $|b_1| = |\lambda| \neq 1$. On conclut que $\tilde{f}(w) = b_1 w$.

Enfin, par un changement de coordonnée de la forme $w \mapsto e^{i\theta} w$, on peut ramener b_1 à $|b_1|$ qui est exactement $|\lambda|$, comme voulu. \square

Le cas où $\lambda = 0$ se fait de la même façon. On a la proposition suivante.

Proposition 1.3.2. *Soit $f: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe antiholomorphe. On pose $\lambda = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(0)$. Si $\lambda = 0$, alors f est analytiquement équivalent à $\zeta \mapsto \bar{\zeta}^{p^2}$, où $p > 1$ est l'entier tel que $\frac{\partial^j}{\partial \bar{z}^j} f(0) = 0$ pour $j = 1, \dots, p-1$ et $\frac{\partial^p}{\partial \bar{z}^p} f(0) \neq 0$.*

Démonstration. Puisque $f \circ f(z) = az^{p^2} + o(z^{p^2})$, où $a = |\frac{\partial^p}{\partial \bar{z}^p} f(0)|^2 \neq 0$, par la proposition 1.1.4, il existe un changement de coordonnée h tel que $h \circ f \circ f \circ h^{-1}(w) = w^{p^2}$. On pose $\tilde{f} = h \circ f \circ h^{-1}$. On suppose que $\tilde{f}(w) = a_1 \bar{w} + a_2 \bar{w}^2 + \dots$. On a

$$\begin{aligned} w^{2p} &= \tilde{f} \circ \tilde{f}(w) \\ &= a_1(\overline{a_1} w + \overline{a_2} w^2 + \dots) + a_2(\overline{a_1} w + \overline{a_2} w^2 + \dots)^2 + \dots \\ &= |a_1|^2 w + (a_1 \overline{a_2} + a_2 \overline{a_1}^2) w^2 + \dots \end{aligned}$$

En comparant les termes linéaires de chaque côté de l'égalité, on voit que $a_1 = 0$. Ensuite, par induction, si $a_k = 0$ pour $k = 1, \dots, n$, alors on a

$$\begin{aligned} w^{p^2} &= \tilde{f} \circ \tilde{f}(w) \\ &= a_{n+1}(\overline{a_{n+1}} w^{n+1} + \overline{a_{n+2}} w^{n+2} + \dots)^{n+1} + a_{n+2}(\overline{a_{n+1}} w^{n+1} + \overline{a_{n+2}} w^{n+2} + \dots)^{n+2} + \dots \end{aligned}$$

On voit que pour $n+1 < p$, on a $a_{n+1} = 0$. Pour $n+1 = p$, on a $a_p \overline{a_p}^p = 1$.

Il reste à montrer que les a_k sont nuls pour $k > p$. On a

$$\begin{aligned} w^{p^2} &= \tilde{f} \circ \tilde{f}(w) \\ &= a_p(\overline{a_p} w^p + \overline{a_{p+1}} w^{p+1} + \dots)^p + a_{p+1}(\overline{a_p} w^p + \overline{a_{p+1}} w^{p+1} + \dots)^{p+1} + \dots \end{aligned}$$

On trouve $pa_p \overline{a_p}^{p-1} \overline{a_{p+1}} = 0$ en comparant les coefficients de w^{p^2+1} . Par induction, si $a_k = 0$ pour $k = p+1, \dots, n$, alors on a

$$\begin{aligned} w^{p^2} &= \tilde{f} \circ \tilde{f}(w) \\ &= a_p(\overline{a_p} w^p + \overline{a_{n+1}} w^{n+1} + \dots)^p + a_{n+1}(\overline{a_p} w^p + \overline{a_{n+1}} w^{n+1} + \dots)^{n+1} + \dots \end{aligned}$$

et en comparant les coefficients de $w^{p^2-p+n+1}$, on a $pa_p \overline{a_p}^{p-1} \overline{a_{n+1}} = 0$. On conclut que $a_k = 0$ pour $k > p$.

Pour obtenir $a_p = 1$, on peut faire un changement de coordonnée linéaire. Ceci termine la preuve. \square

Il reste le cas où $|\lambda| = 1$ que l'on appelle le cas parabolique. On dit que 0 est un point fixe parabolique de f si $|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(0)| = 1$ et si 0 est un point fixe isolé. On dira aussi que f est parabolique (en 0). Ce cas est beaucoup plus compliqué et fait l'objet du prochain chapitre, le chapitre 2.

Premier article.

Analytic Classification of Germs of Parabolic Antiholomorphic Diffeomorphisms of Codimension k

par

Jonathan Godin¹ et Christiane Rousseau¹

(¹) Université de Montréal, C.P. 6128,
Succ. Centre-Ville, Montréal, Qc, Canada, H3C 3J7

Cet article a été soumis dans « Ergodic Theory and Dynamical Systems ».

Contributions de chaque coauteur·e

J'ai écrit l'entièreté de l'article et fait les figures. Christiane Rousseau a fourni le sujet et révisé l'article. Ses commentaires ont amélioré la présentation de l'article, ainsi que la clarté et l'exactitude de certains passages. Nos discussions m'ont également guidé pour ces recherches.

RÉSUMÉ. On étudie la dynamique locale des difféomorphismes antiholomorphiques autour d'un point fixe parabolique. On donne d'abord une forme normale. Ensuite, on donne une classification complète sous la conjugaison analytique et un espace de module pour les germes antiholomorphes ayant un point parabolique fixe. On étudie ensuite quelques applications géométriques : existence d'une courbe réelle analytique invariante, existence de racine holomorphes ou antiholomorphes de germes paraboliques holomorphes ou antiholomorphes et description de l'ensemble des germes holomorphes ou antiholomorphes qui commutent avec un germe parabolique antiholomorphe donné.

Mots clés : Dynamique antiholomorphe, point fixe parabolique antiholomorphe, classification analytique locale, espace des orbites près d'un point fixe

ABSTRACT. We investigate the local dynamics of antiholomorphic diffeomorphisms around a parabolic fixed point. We first give a normal form. Then we give a complete classification including a modulus space for antiholomorphic germs with a parabolic fixed point under analytic conjugacy. We then study some geometric applications: existence of real analytic invariant curve, existence of holomorphic and antiholomorphic roots of holomorphic and antiholomorphic parabolic germs, commuting holomorphic and antiholomorphic parabolic germs.

Keywords: Antiholomorphic Dynamics, Antiholomorphic Parabolic Fixed Point, Local Classification under Analytic Conjugation, Space of Orbits near a Fixed Point

2.1. Introduction

In this paper, we are interested in the local dynamics of antiholomorphic diffeomorphisms with a parabolic fixed point, i.e. a fixed point of multiplicity $k+1$ (i.e. of codimension k). We study the classification under conjugacy by analytic changes of coordinate of a germ of an antiholomorphic diffeomorphism f with a parabolic fixed point. In local coordinate, it may be chosen in the form

$$f(z) = \bar{z} + \frac{1}{2}\bar{z}^{k+1} + o(\bar{z}^{k+1}) \quad (2.1.1)$$

for some integer $k \geq 1$.

The classification of parabolic fixed points in the holomorphic case for a germ

$$g(z) = z + z^{k+1} + \left(\frac{k+1}{2} - b\right) z^{2k+1} + o(z^{2k+1}) \quad (2.1.2)$$

is well known. (See e.g. [10] or [11].) The dynamics of g (see Figure 1) is determined by a topological invariant, the integer k , a formal invariant, the complex number b , and an analytic invariant given by an equivalence class of $2k$ germs of diffeomorphisms which are the transition functions on the space of orbits of g (the Écalle horn maps). Two germs g_1 and g_2 are formally equivalent if and only if they have the same topological invariant and

formal invariant. Furthermore, they are analytically equivalent if and only if they also have the same analytic invariant.

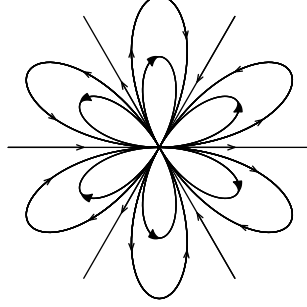


Figure 1. Dynamics of a holomorphic parabolic germ with topological invariant $k = 3$

The goal of this paper is to establish a local classification of antiholomorphic parabolic germs under the analytic conjugation and to describe the space of orbits of such a germ and, more generally, to explore the geometric properties of antiholomorphic parabolic germs which are invariant under analytic conjugation. This is done for fixed points of any multiplicity. It allows us to provide a solution to the following problems.

Questions

1. (*Antiholomorphic Root Extraction*) The second iterate of an antiholomorphic parabolic germ f as in equation (2.1.1) is a holomorphic germ which is parabolic. When is the converse true: Given a parabolic germ of holomorphic diffeomorphism g , when is it possible to write it as $g = f \circ f$, for some antiholomorphic parabolic germ f ? We call f an *antiholomorphic square root* of g . More generally, when does g have an antiholomorphic root of some order?
2. Analogously, when does an antiholomorphic parabolic germ have an antiholomorphic root? When are the roots unique?
3. (*Embedding*) Let $\{v^t\}_t$, where $v^t: z \mapsto v^t(z)$, be the flow of the differential equation $\dot{z} = v(z) = \frac{z^{k+1}}{1+bz^k}$. Each v^t ($t \neq 0$) is a holomorphic germ with a parabolic fixed point at the origin. Then $\overline{v^{\frac{1}{2}}(\cdot)}$ is an antiholomorphic germ, and any antiholomorphic parabolic germ is formally conjugate to such a germ. Given an antiholomorphic parabolic germ f , when is it analytically conjugate to some $\overline{v^{\frac{1}{2}}(\cdot)}$? In that case, it allows to embed f in the family $\overline{v^t}$.
4. When does an antiholomorphic germ preserve a germ of real analytic curve? This is equivalent to say that the germ is analytically conjugate to a germ with real coefficients.
5. (*Centralizer*) Can we describe all the antiholomorphic parabolic germs f that commute with a holomorphic parabolic germ g ? If f and g commute, then f sends the orbits of g on the orbits of g . This greatly restricts the possible f . In an analogous way, can

we describe all the holomorphic and the antiholomorphic germs that commute with an antiholomorphic parabolic germ?

The above problems are questions about the equivalence classes of germs under analytic conjugacy. Therefore, the answer should be read in the modulus of classification, which will be introduced in Section 2.5.

The local dynamics of an antiholomorphic parabolic germ has similarities with the holomorphic case: indeed the n -th iterate $f^{\circ n}$ is holomorphic for n even. We find that the dynamics is determined by the same topological and formal invariants, but the analytic invariant is composed of k germs of diffeomorphisms, instead of $2k$. This is explained by the fact that an orbit of f will usually jump between two Fatou petals of its associated holomorphic parabolic germ $f^{\circ 2}$ (see Figure 2), so that the dynamics in those petals are not independent.

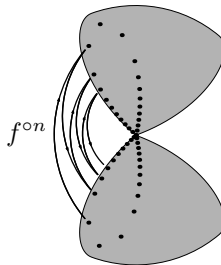


Figure 2. An orbit of f jumping between two petals. An orbit of the second iterate $f^{\circ 2}$ will remain either in the upper petal or the lower petal.

We observe other differences from the holomorphic case. A holomorphic germ has $2k$ formal separatrices. The antiholomorphic germ has instead a privileged unique direction; a *formal symmetry axis*. There is also a topological difference between the cases where the codimension is odd or even. When k is even, the rotation $z \mapsto -z$ is a formal symmetry of f , whilst it is not for k odd.

Antiholomorphic dynamics has been considered before in the context of anti-polynomials, that is a polynomial function of \bar{z} , $p(z) = \bar{z}^n + \dots + a_0$. Iteration of anti-polynomials was studied by Nakane and Schleicher in [16], Hubbard and Schleicher in [9], Inou and Muckerjee in [12], and Mukherjee, Nakane and Schleicher in [15]. Their focus is mostly on the family of anti-polynomials $p_c(z) = \bar{z}^d + c$ and the description of the connectedness locus \mathcal{M}_d^* called the *multicorn*. The context is global in nature, but the local analysis contributes significantly.

An important role is played by periodic orbits of p_c of odd period k , because when k is odd, $p_c^{\circ k}$ is antiholomorphic. In this case, all indifferent periodic orbits are parabolic and they occur along real analytic arcs in the parameter space, as proved in [9] and [15].

However, only points of codimension 1 and 2 are observed. This is due to a choice of a special subfamily of anti-polynomials of degree d . Indeed, higher codimension is already observed in the 2-parameter family $\bar{z}^d + c_1\bar{z} + c_0$, e.g. when $c_1 = 1$ and $c_0 = 0$.

One of the tools used for anti-polynomials is called the *Écalles height*, introduced by Hubbard and Schleicher in [9]. In codimension 1, on the Écalles cylinder of the attractive petal, the imaginary part of an orbit is intrinsic, and this is used to prove that landing points of curves in the parameter space where p_c has a parabolic periodic orbit of odd period are points of codimension 2. When studying the space of orbits of an antiholomorphic germ of parabolic diffeomorphism of any codimension, we see that the Écalles height has a meaning only on the Écalles cylinder of the petals containing the formal symmetry axis of f . This is seen by describing the space of orbits on a neighbourhood of a parabolic fixed point, which we do in Section 2.6.2.

The paper is organized as follows. In Section 2.2, we define the topological and formal invariants of f . We also establish a formal normal form for f .

In Section 2.3, we study the formal normal form.

In Section 2.4, we introduce the rectifying coordinate and the Fatou coordinates in order to define the transition functions (Def. 2.27) in Section 2.5, which is the analytic invariant. This leads to the modulus of classification of f .

In Section 2.6.1, we recall a description of the space of orbits in the holomorphic case using $2k$ spheres (or Écalles cylinders) glued with the horn maps (these are the expressions of the transition functions in the coordinates of the spheres). We use this space of orbits in Section 2.6.2 to identify the space of orbits of f to a manifold of real dimension 2 by quotienting the space of orbits of $f \circ f$ by the action of f .

After describing the space of orbits, we state, in Section 2.6.3, the main result of the paper: the Classification Theorem 2.32. The idea in spirit is that two germs are equivalent if and only if their space of orbits are equivalent; the Classification Theorem is a way to rigorously express this statement.

Finally, with the Classification Theorem in hands, in Section 2.7 we answer Questions 1 to 5 of the introduction.

2.2. Antiholomorphic Parabolic Fixed Points

Notation. For the whole paper, we will use the following notation :

- $\sigma(z) = \bar{z}$ is the complex conjugation;
- $\tau(w) = \frac{1}{\bar{w}}$ is the antiholomorphic inversion;
- $T_C(Z) = Z + C$ is the translation by $C \in \mathbb{C}$;
- $L_c(w) = cw$ is the linear transformation with multiplier $c \in \mathbb{C}$;

— v^t is the time- t of the vector field

$$\dot{z} = v(z) = \frac{z^{k+1}}{1 + bz^k}. \quad (2.2.1)$$

A function $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ defined on a domain $U \subseteq \mathbb{C}$ is antiholomorphic if $\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0$ on U . From this definition, together with the chain rule, it follows that antiholomorphy is an intrinsic property of f under holomorphic changes of variable. Equivalently, $f: z \mapsto f(z)$ is antiholomorphic if $f \circ \sigma: z \mapsto f(\bar{z})$ is holomorphic, therefore $f(z)$ expands in a power series in terms of \bar{z} .

Note that the multiplier at a fixed point of an antiholomorphic function is not intrinsic, only its modulus is. Indeed, a scaling of z by λ will add a factor of $\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}$ to the multiplier.

Definition 2.1 (Parabolic fixed point). *A germ of antiholomorphic diffeomorphism fixing the origin $f: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ has a parabolic fixed point at 0 if 0 is an isolated fixed point and*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(0) \right| = 1.$$

We will also say that f is an antiholomorphic parabolic germ.

Proposition 2.2. *Let $f(z) = a_1\bar{z} + a_2\bar{z}^2 + a_3\bar{z}^3 + \dots$. If $|a_1| = 1$, then f is formally conjugate to a formal power series*

$$f^\dagger(w) = \bar{w} + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \bar{w}^n \quad (2.2.2)$$

with real coefficients A_n . If there exists $n \geq 2$ such that $A_n \neq 0$, then 0 is a parabolic fixed point of f . Let $n_0 = k + 1$ be the minimum such n . Then a scaling brings A_{k+1} to $\frac{1}{2}$ if k is odd (resp. $\pm \frac{1}{2}$ if k is even).

PROOF. The proof is a mere computation. Let $w = \hat{h}(z) = \sum_{n \geq 1} b_n z^n$ be a formal change of coordinate and suppose $f^\dagger(w) = \bar{w} + \sum_{n \geq 2} A_n \bar{w}^n$. If we compare $h \circ f(z) = f^\dagger \circ h(z)$ degree by degree, we find an expression for the coefficients of the form

$$\begin{cases} b_1 a_1 = \bar{b}_1 \\ A_n = b_n - \bar{b}_n + a_n + P_n(A_1, \dots, A_{n-1}, a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}), \end{cases}$$

where P_n is some polynomial. Hence, we have $\arg b_1 = -\frac{1}{2} \arg a_1 + \ell\pi$, with $\ell \in \mathbb{Z}$. With a recursive argument, if A_1, \dots, A_{n-1} are real, for A_n to be real, we may choose $\Im b_n = \frac{1}{2} \Im(a_n + P_n)$, since P_n depends only on terms that were determined in the previous steps. \square

Remark 2.3. The formal change of coordinate \hat{h} is not unique. Indeed, only the imaginary part of the coefficients are determined, leaving their real part free. However, the order of the first non linear term is well defined. This leads to the following definition.

Definition 2.4. We say that f is *parabolic* of codimension k if the first non linear term of f^\dagger is of order $k + 1$.

Remarks 2.5. 1. The formal series with real coefficients preserves the real axis. This indicates that f has a privileged unique direction which we will call a *formal symmetry axis*. Hence a conjugacy between two antiholomorphic parabolic germs must preserve the formal symmetry axis. We can of course suppose that this formal axis is the real axis. Note however that in the case of even codimension, there is no canonical orientation of the formal symmetry axis.

2. The dynamics nearby the formal symmetry axis is a topological invariant. When k is odd, a rotation of angle π will flip the attractive semi-axis with the repulsive one. When k is even, both semi-axes are either attractive (when $A_{k+1} < 0$) or repulsive (when $A_{k+1} > 0$) (see Figures 3 and 4). In this paper, **we will only consider the case $A_{k+1} > 0$** . Indeed, when $A_{k+1} < 0$, i.e. f is of *negative type*, then f^{-1} will be of *positive type* and classifying f^{-1} is equivalent to classifying f .

Definition 2.6. When the codimension k is even, we say f is of *positive type* (resp. *negative type*) if $A_{k+1} > 0$ (resp. $A_{k+1} < 0$), where A_{k+1} is the first non zero coefficient in (2.2.2).



Figure 3. Dynamics near the formal symmetry axis of $f(z) = \bar{z} + o(\bar{z})$ in *odd* codimension. One sector is attractive and the other repulsive; this yields the two possibilities above.



Figure 4. Dynamics near the formal symmetry axis of $f(z) = \bar{z} + o(\bar{z})$ in *even* codimension. The possibilities are: on the left, both sectors are repulsive (positive type) and, on the right, both are attractive (negative type).

The composition of two antiholomorphic germs is holomorphic. Therefore, we will look at $g := f \circ f$, which is a holomorphic parabolic germ. Recall that in the holomorphic case, the multiplicity of the fixed point of g is the order of the first non zero term of $g(z) - z$. It is linked to the codimension of the fixed point: g is of codimension k if and only if the fixed point has multiplicity $k + 1$.

Corollary 2.7. f is of codimension k if only if $g = f \circ f$ is of codimension k .

The case when $f \circ f = id$ is seen as a degenerate case where f is of “codimension infinity”. Indeed, it only happens if f is analytically conjugate to the complex conjugation, as is shown below. This case was excluded from our definition of parabolic point, since the fixed point of σ at the origin is not isolated.

Proposition 2.8. *Let $f(z) = a_1\bar{z} + a_2\bar{z}^2 + a_3\bar{z}^3 + \dots$ be an antiholomorphic germ at the origin. The following statements are equivalent:*

1. f is formally conjugate to σ ;
2. f is analytically conjugate to σ ;
3. $f \circ f = id$.

PROOF. 1. \Rightarrow 3. Since there is a formal change of coordinate m such that $m \circ f \circ m^{-1} = \sigma$, we have $m \circ f \circ f \circ m^{-1} = id$ formally, which yields $f \circ f = id$.

3. \Rightarrow 2. Let us suppose that $f \circ f = id$. In particular, $|a_1| = 1$. We can of course suppose f is already in a coordinate such that $a_1 = 1$.

Let $F_1(x, y) = \Re f(z)$ and $F_2(x, y) = \Im f(z)$, then we have

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + O(|(x, y)|^2) \\ -y + O(|(x, y)|^2) \end{pmatrix}.$$

We are interested in the fixed points of F , that is the zeros of $F - id$. Since $\frac{\partial}{\partial y}(F_2(x, y) - y)|_{(0,0)} = -2$, by the Implicit Function Theorem, there exists an analytic curve $\gamma: t \mapsto t + i\eta(t)$ such that $F_2(x, y) - y = 0$ if and only if $y = \eta(x)$.

We complexify t to obtain a change of coordinate $t = \gamma^{-1}(z) = u + iv$ that rectifies the curve γ on the real line. Let $\tilde{f} = \gamma^{-1} \circ f \circ \gamma$. In the new coordinate, $\tilde{F} = \gamma^{-1} \circ F \circ \gamma$ has now the form

$$\tilde{F}(u, v) = \begin{pmatrix} u + r(u, v) \\ -v(1 + O(|(u, v)|^2)) \end{pmatrix},$$

where $r(u, v) = O(|(u, v)|^2)$. The equation for fixed points $\tilde{F} = id$ is equivalent to $v = 0$ and $r(u, 0) = 0$. If $r(u, 0) = au^s + o(u^s)$, $a \neq 0$, then this would contradict the fact that we must have $\tilde{F} \circ \tilde{F}(u, 0) = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$. Therefore $r(u, 0) \equiv 0$, in other words $r(u, v) = vp(u, v)$.

We see that the real axis is a line of fixed points for \tilde{f} near the origin. By the Identity Theorem, because $\tilde{f} \circ \sigma - id = 0$ on the real axis near the origin, we have $\tilde{f} \equiv \sigma$.

2. \Rightarrow 1. This is immediate. □

The formal power series with real coefficients is used to determine a formal normal form for f . Recall that a formal normal form for $g := f \circ f$ may be taken as the time-1 map of the flow of (see [11])

$$\dot{z} = \frac{z^{k+1}}{1 + bz^k} \tag{2.2.3}$$

for some constant $b \in \mathbb{C}$. We will call this constant b the *formal invariant*. It is also sometimes called the “résidu itératif” and, as mentioned in [9], it is determined by the holomorphic fixed point index, that is, the residue of $\frac{1}{z-g(z)}$ at the origin.

When $g = f \circ f$ is of codimension k , it is possible to get rid of the terms of degree $k+1 < j < 2k+1$ by an analytic change of coordinate. In this coordinate, g is written

$$g(z) = z + z^{k+1} + \left(\frac{k+1}{2} - b \right) z^{2k+1} + o(z^{2k+1}), \quad (2.2.4)$$

where $b \in \mathbb{C}$ is the formal invariant of g . When g is in this form, we will say that it is *prenormalized*.

Definition 2.9. *The formal invariant of f is the formal invariant of $f \circ f$, which is the constant b in (2.2.4).*

As the name suggests, b is invariant under formal changes of coordinate. Since $g^\dagger := f^\dagger \circ f^\dagger$ and g have the same formal invariant, where f^\dagger is as in (2.2.2), it follows that b is real because all the coefficients of g^\dagger are real.

An important consequence of this, is that the time- t map v^t of (2.2.3) for $t \in \mathbb{R}$ has a power series at 0 with real coefficients, that is the complex conjugation σ and v^t commute.

Proposition 2.10. *Let $v^{\frac{1}{2}}$ be the time- $\frac{1}{2}$ of the vector field (2.2.3) for some b . If f is of codimension k , of positive type if k is even and if f has formal invariant b , then f and $\sigma \circ v^{\frac{1}{2}}$ are formally conjugate.*

PROOF. Let f^\dagger be the formal power series with real coefficients formally conjugate to f in Proposition 2.2. Then $f^\dagger \circ \sigma$ is a parabolic formal power series of z . A formal normal form may be chosen as $v^{\frac{1}{2}}$, the time- $\frac{1}{2}$ of the vector field (2.2.3). Since both the coefficients of $v^{\frac{1}{2}}$ and f^\dagger are real, the formal change of coordinate h commutes with σ , provided that $h'(0) = 1$, so that $v^{\frac{1}{2}} \circ \sigma$ is formally conjugate to f . \square

The formal change of coordinate conjugating f to its formal normal form can always be truncated at the $(2k+2)$ -th term, which yields a holomorphic change of coordinate taking f to the form

$$f(z) = \bar{z} + \frac{1}{2}\bar{z}^{k+1} + \left(\frac{k+1}{8} - \frac{b}{2} \right) \bar{z}^{2k+1} + o(\bar{z}^{2k+1}), \quad (2.2.5)$$

that is f and $\sigma \circ v^{\frac{1}{2}}$ have the same first three terms.

Definition 2.11. *When f is in the form (2.2.5), we will say that it is prenormalized.*

Remark 2.12. In even codimension, f may only be prenormalized as in (2.2.5) when $A_{k+1} > 0$. In odd codimension, f may always be prenormalized as in (2.2.5).

The formal normal form is a model to which the germs can be compared. Now that this form has been established, we describe its properties.

2.3. Properties of the Formal Normal Form

Let us start with the following observations.

Proposition 2.13. *Let v be the vector field (2.2.3) of codimension k and formal invariant b .*

1. v is invariant under the rotations of order k .
2. v is invariant under the complex conjugation σ when b is real.

The holomorphic and antiholomorphic formal normal forms are respectively

$$v^1(z) = z + z^{k+1} + \left(\frac{k+1}{2} - b \right) z^{2k+1} + o(z^{2k+1}) \quad (2.3.1)$$

$$\sigma \circ v^{\frac{1}{2}}(z) = \bar{z} + \frac{1}{2} \bar{z}^{k+1} + \left(\frac{k+1}{8} - \frac{b}{2} \right) \bar{z}^{2k+1} + o(\bar{z}^{2k+1}), \quad (2.3.2)$$

where v^t is the time- t of v .

When b is real, we see that the real axis is a symmetry axis. We introduce a notation for the other symmetry axes under the same hypothesis.

Definition 2.14. *Let σ_ℓ denote the reflection*

$$\sigma_\ell(z) := e^{\frac{2i\pi\ell}{k}} \bar{z}, \quad \text{for } \ell = 0, \dots, k-1. \quad (2.3.3)$$

Corollary 2.15.

1. v is invariant under σ_ℓ for $\ell = 0, \dots, k-1$ when b is real;
2. v^1 commutes with any rotation of order k , and when b is real, it commutes with σ_ℓ for $\ell = 0, \dots, k-1$;
3. When k is even, $\sigma \circ v^{\frac{1}{2}}$ commutes with $z \mapsto -z$.

We will only be interested in real values of b .

Proposition 2.16 (Roots of the normal forms).

1. For n even, v^1 has k one-parameter families of antiholomorphic n -th roots given by $\sigma_\ell \circ v^{\frac{1}{n}+iy}$ for $y \in \mathbb{R}$, $\ell = 0, \dots, k-1$.
2. For n odd, $\sigma \circ v^{\frac{1}{2}}$ has exactly one antiholomorphic n -th root given by $\sigma \circ v^{\frac{1}{2n}}$.

We ask the following questions, which will be answered in Section 2.7.2.

Question 2.17. For a holomorphic parabolic germ g , how many distinct antiholomorphic n -th roots (n even) does it have?

Question 2.18. For an antiholomorphic parabolic germ f and n odd, when is the formal n -th root convergent?

2.4. Fatou Coordinates

For the whole section, when the codimension of f is even, we will suppose f is of positive type (see Definition 2.6). The formal normal form $\sigma \circ v^{\frac{1}{2}}$ is a model to which it is natural to compare the antiholomorphic germ f . In the holomorphic study of parabolic germs, we use holomorphic diffeomorphisms called Fatou coordinates defined on sectors covering the origin on which the germ is conjugated to its normal form, i.e. changes of coordinates to the normal form. We then compare Fatou coordinates on the intersection of the sectors, thus yielding a conformal invariant describing the space of orbits of the germ. See [10] or [11] for the details.

The same approach can be adapted to the antiholomorphic case. It will be necessary to find a sectorial normalization (Fatou coordinates) of the antiholomorphic germ f . However, instead of adapting the construction of the holomorphic case, we will prove that it is possible to choose Fatou coordinates of $f \circ f$, which is holomorphic, that are also Fatou coordinates of f .

2.4.1. Rectifying Coordinates and sectors

Suppose that an antiholomorphic parabolic germ f is of codimension k for $k \geq 1$ with a formal invariant b (see Def. 2.9). The Fatou coordinates φ_j are often constructed in the rectifying coordinate given by the time of the vector field (2.2.3). Since $v^{\frac{1}{2}}$ and v^1 are the time maps of the vector field (2.2.3), we define the time coordinate by

$$Z(z) = \int_{z_0}^z \frac{1 + b\zeta^k}{\zeta^{k+1}} d\zeta = -\frac{1}{kz^k} + b \log z + \frac{1}{kz_0^k} - b \log z_0 \quad (2.4.1)$$

which is multi-valued. See Figure 5 for its Riemann surface. It is the inverse of the flow of (2.2.3) with starting point z_0 . We will single out the following $2k + 1$ charts of Z :

$$Z_j(z) = -\frac{1}{kz^k} + b \log z - \frac{ji\pi b}{k} \quad (2.4.2)$$

for $j = -k, \dots, -1, 0, 1, \dots, k$,

where $\log z$ is determined by $\arg z \in (-\pi, \pi)$ for $-k < j < k$, and for Z_k (resp. Z_{-k}), $\arg(\cdot)$ will be the continuation in $(0, 2\pi)$ (resp. in $(-2\pi, 0)$). In particular, we see that $Z_k = Z_{-k}$, and that *both Z_0 and Z_k commute with the complex conjugation*.

Now we define the sectors in the z -space (see Figure 7). On the Riemann surface of Z_j , we write G_j for the expression of $g := f \circ f$ in the Z_j -coordinate. Let $z_j^* = \delta e^{\frac{ij\pi}{k}}$ for $-k \leq j \leq k$ and some small enough $\delta > 0$. Let Z_j^* be the image of $Z_j(z_j^*)$. We consider a vertical line ℓ_j passing through Z_j^* and its image $G_j(\ell_j)$. Let B_j be the domain bounded by ℓ_j and $G_j(\ell_j)$ and containing ℓ_j and $G_j(\ell_j)$. The sector in the Z_j -coordinate is then obtained

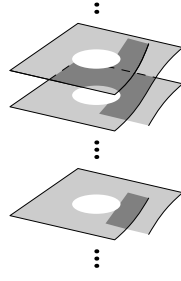


Figure 5. The Riemann surface of the time coordinate Z . The hole in the middle correspond to the image of $\mathbb{C} \setminus D(0, r)$ in the z -coordinate, while a neighbourhood of $z = 0$ is sent to a neighbourhood of infinity. A curve going k times around the hole in the Z -coordinate will turn one time around ∞ in the z -coordinate.

by

$$U_j = \{Z_j \mid \exists n \in \mathbb{Z}, G_j^{on}(Z_j) \in B_j\}$$

for $-k \leq j \leq k$ (see Figure 6). We see that $U_{-k} = U_k$, since $Z_k = Z_{-k}$. The sector S_j in the z -coordinate is $Z_j^{-1}(U_j)$ (see Figure 7). These sectors are sometimes called *Fatou petals*. They are described in great details in [3], although the authors only consider *attractive* petals. Note that there are $2k$ petals, with half of them being *repulsive* (see Figure 8). Also, S_k and S_{-k} are the same petal.

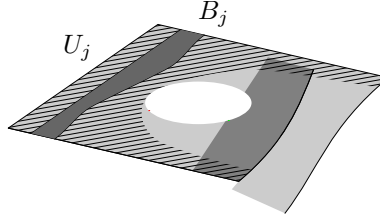


Figure 6. A chart U_j on the Riemann surface with the vertical strip B_j

Remark 2.19. Note that

$$2i\pi b = \int_{\partial D(0, \delta)} \frac{1 + bz^k}{z^{k+1}} dz = \sum_j \int_{Z_j(\gamma_j)} dZ_j = \sum_{j=-k+1}^k \left(Z_j(z_{j+1}) - Z_j(z_j) \right)$$

where γ_j is an arc of the circle $\partial D(0, \delta)$ in S_j , with endpoints z_{j+1} and z_j , where $z_j = \delta e^{\frac{i(2j-1)\pi}{2k}}$. The Z_j defined as in (2.4.2) satisfy this condition.

The sectors are ordered as in Figure 9. Note in particular that S_0 intersects the positive real axis, and $S_k = S_{-k}$, the negative real axis.

Definition 2.20. *The time coordinate is the Riemann surface obtained from the disjoint union of the U_j , glued together by the transition functions: the charts are the $U_j \hookrightarrow \mathbb{C}$, with*

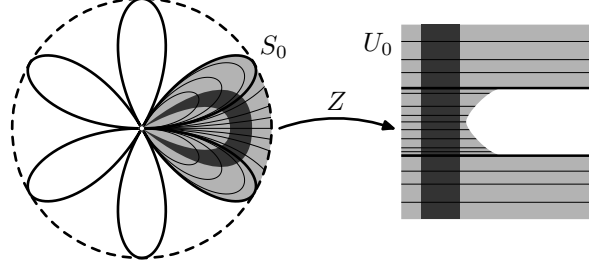


Figure 7. The particular case of $\dot{z} = z^4$. On the right, the sector U_0 in the Z_0 -coordinate, obtained from a strip (in dark gray). On the left, $S_0 = Z^{-1}(U_0)$ the sector in z , with the preimage of the strip (in dark gray).

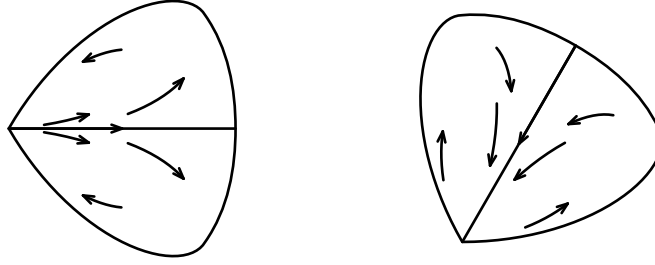


Figure 8. Petals for the holomorphic map $f \circ f$. Dynamics inside a repulsive petal on the left. Dynamics inside an attracting petal on the right.

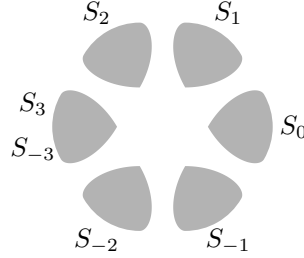


Figure 9. Ordering of the sectors for $k = 3$.

the diffeomorphism $Z_j: S_j \rightarrow U_j$ given by

$$Z_j(z) = -\frac{1}{kz^k} + b \log z - \frac{ji\pi b}{k},$$

and the transition functions are $Z_j \circ Z_{j-1}^{-1} = T_{\frac{-i\pi b}{k}}$ for $-k < j \leq k$ where the composition is defined.

The time coordinate is conformally equivalent to a punctured disk of the origin.

Now we define the complex conjugation on the time coordinate. Note that on a subdomain $S'_0 \subseteq S_0$ such that $\sigma(S'_0) = S'_0$, we have $Z_0(\bar{z}) = \overline{Z_0(z)}$. The complex conjugation on the time coordinate is then obtained by analytic continuation on the other charts U_j .

Proposition 2.21 (Complex conjugation). *For $z \in S_j$, let ℓ be such that $\sigma(z) = \bar{z} \in S_\ell$. We define the complex conjugation Σ on the time coordinate in the charts by*

$$\begin{aligned}\Sigma_{\ell,j} &: U_j \rightarrow U_\ell, \\ \Sigma_{\ell,j} \circ Z_j(z) &= Z_\ell \circ \sigma(z).\end{aligned}$$

Then Σ is well-defined and $\Sigma \circ \Sigma = id$.

PROOF. The proof consists of showing that Σ is compatible on both charts when $Z_j \in U_j \cap U_{j+1}$ or when $\Sigma(Z_j) \in U_\ell \cap U_{\ell+1}$. It is a simple computation. Note that for a subdomain $S'_j \subset S_j$ such that $\sigma(S'_j) \subset S_{-j}$, then in the charts, we have $\Sigma_{-j,j}(Z_j) = \overline{Z_j}$. \square

This allows us to talk about the normal form $\sigma \circ v^{\frac{1}{2}}$ in the time coordinate. It is the antiholomorphic map $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$.

2.4.2. Fatou Coordinates

Let us call the petals of the normal form S_j^v . The orbits of the normal form $\sigma \circ v^{\frac{1}{2}}$ jump from S_j^v to S_{-j}^v . This means that the dynamics of those two petals is no longer independent, unlike the holomorphic case. See Figure 10.

In its prenormalized form f is close to $\sigma \circ v^{\frac{1}{2}}$ in the sense that $|f - \sigma \circ v^{\frac{1}{2}}| = o(|z|^{2k+1})$. In the following lemma, we prove that it is also true that F and $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$ are close in the time coordinate.

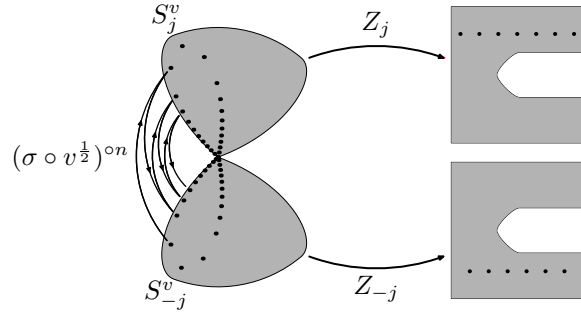


Figure 10. On the left, an orbit of $\sigma \circ v^{\frac{1}{2}}$ in the z coordinate. The orbit jumps between the sectors S_j^v and S_{-j}^v . On the right, the same orbit is represented in the time coordinate; it is the orbit of $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$.

Lemma 2.22. *Let f be in its prenormalized form (2.2.5) and let F (resp. $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$) be the expressions of f (resp. $\sigma \circ v^{\frac{1}{2}}$) in the time coordinate. On each chart U_j , we have $|F - \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}| = O(|Z|^{-1})$.*

PROOF. Let $m(z) = f \circ (\sigma \circ v^{\frac{1}{2}})^{-1}(z) = z + o(z^{2k+1})$. We see that

$$\begin{aligned} Z_j \circ m(z) &= -\frac{1}{kz^k}(1 + o(z^{2k})) + b \log z + o(z^{2k}) - \frac{ji\pi b}{k} \\ &= Z_j(z) + o(z^k). \end{aligned}$$

Since $z^k Z_j(z) \rightarrow -\frac{1}{k}$ when $z \rightarrow 0$, and because Z_j is invertible and $|Z_j(z)| \rightarrow \infty$ when $z \rightarrow 0$, it follows that $o(z^k)$ is $O(|Z_j|^{-1})$ when $|Z_j| \rightarrow \infty$. Therefore, $F \circ (\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}})^{-1}(Z_j) = Z_j + O(|Z_j|^{-1})$. \square

We now present the existence of the Fatou coordinates. Note that Hubbard and Schleicher proved their existence in [9] (Lemma 2.3) in the codimension 1 case for a map with a parabolic periodic orbit of odd period n . We recover their case by considering $f^{\circ n}$. This corresponds for us to a germ of antiholomorphic parabolic diffeomorphism of codimension 1. The proof in higher codimension is in the same spirit with an adaptation, since we need to work with pairs of sectors (U_j, U_{-j}) .

Proposition 2.23. *Let F and Σ be the expression of f and σ in the time coordinates respectively. Recall that $U_j = Z_j(S_j)$. On each U_j , there exists a holomorphic diffeomorphism $\Phi_j: U_j \rightarrow \mathbb{C}$ such that*

$$\Phi_j \circ F \circ \Phi_{-j}^{-1} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}, \quad (2.4.3)$$

whenever the composition is defined.

Moreover, if $\tilde{\Phi}_j$ are other Fatou coordinates, then there exists $C_j \in \mathbb{C}$ for $j = 1, \dots, k-1$ and $C_0, C_k \in \mathbb{R}$ such that $\Phi_j \circ \tilde{\Phi}_j^{-1} = T_{C_j}$ and $\Phi_{-j} \circ \tilde{\Phi}_{-j}^{-1} = T_{\overline{C_j}}$ for $j \geq 0$.

PROOF. The proof makes use of the rigidity of the conformal structure of the doubly punctured sphere $S^2 \setminus \{0, \infty\}$, as in the proof of the uniqueness in the holomorphic case.

Let Φ_j denote the Fatou coordinate of $f \circ f$ on U_j , that is

$$\Phi_j \circ (F \circ F) \circ (\Phi_j)^{-1} = T_1.$$

(We know that it exists since $f \circ f$ is holomorphic and that it is unique up to left-composition with a translation.) In the space of the Fatou coordinate $W_j = \Phi_j(Z_j)$, an orbit $\{(f \circ f)^{\circ n}(z)\}_n$ corresponds to $\{W_j + n\}_n$. Note also that we have

$$\Phi_j(Z_j) = Z_j + D_j + O(|Z_j|^{-1}), \quad (2.4.4)$$

for some constant $D_j \in \mathbb{C}$ (see [11]).

We first note that each $\Phi_j(U_j)$ contains a vertical strip B_j of width 1, by construction of the time coordinate U_j and of the Fatou coordinate. We define

$$Q_j = \Phi_{-j} \circ F \circ (\Phi_j)^{-1} \quad \text{for } -k \leq j \leq k.$$

Then we see that $Q_j \circ Q_{-j} = T_1$ since Φ_j are Fatou coordinates of $F \circ F$. It follows that Q_j commutes with T_1 , since

$$\begin{aligned} T_1 \circ Q_j &= (Q_j \circ Q_{-j}) \circ Q_j \\ &= Q_j \circ (Q_{-j} \circ Q_j) \\ &= Q_j \circ T_1. \end{aligned}$$

Indeed, Q_j represents F in the Fatou coordinates. It is therefore natural that Q_j commutes with T_1 , which represents $F \circ F$ in the Fatou coordinates.

Because Q_j is the composition of an antiholomorphic germ with holomorphic diffeomorphisms, Q_j is antiholomorphic. In particular, $\Sigma \circ Q_j$ is holomorphic, and $\Sigma \circ Q_j - id$ is 1-periodic and holomorphic, so it has a Fourier expansion

$$\Sigma \circ Q_j(W_j) - W_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,j} e^{2i\pi n W_j}.$$

Moreover, by Lemma 2.22 and Equation (2.4.4), we have $\Sigma \circ Q_j(W) = W + M_j + O(|W|^{-1})$, where $M_j \in \mathbb{C}$ is a constant. Therefore, $|\Sigma \circ Q_j - id|$ is bounded when $|W| \rightarrow \infty$, so we must have $c_{n,j} = 0$ for $n \in \mathbb{Z}^*$, because it is defined on B_1 .

We conclude that $Q_j(W_j) = \overline{W_j} + \overline{c_{j,0}}$. Since $Q_j \circ Q_j = T_1$, it follows that $c_{j,0} = \frac{1}{2} + iy$. We then adjust all the $\Im c_{j,0}$ to 0 by choosing the appropriate Fatou coordinates (i.e. composing them with a translation).

The uniqueness comes from a combination of the uniqueness of the Fatou coordinates for the holomorphic $f \circ f$ and having to preserve the constants $c_{j,0} = \frac{1}{2}$. \square

2.5. Modulus of Analytic Classification

If two antiholomorphic parabolic germs are analytically conjugate, then they have the same space of orbits. The space of orbits of an antiholomorphic parabolic germ f is a quotient of the set of orbits of the associated holomorphic parabolic germ $g = f \circ f$. Hence we start by describing the space of orbits of g ; on a Fatou coordinate, it is the quotient by T_1 , which is a bi-infinite cylinder. We also need to identify some orbits represented in two different Fatou coordinates. This is done by means of the transition maps (the horn maps of Écalte).

We will describe the space of orbits of f in Section 2.6.1 and classify the antiholomorphic germs in Section 2.6.3. To do both of these, we will need the *transition functions*, which will form an analytic invariant.

The transition functions we describe here are the same as for the holomorphic case. We will introduce what we need here; all the details are found in [11] or [10].

In the time coordinate, if U_j is a repelling (resp. attractive) petal, then U_j and $T_{i\pi b/k}(U_{j+1})$ intersect on a domain containing an upper half-plane (resp. a lower half-plane), see Figure 11. (Recall that $T_{-i\pi b/k}$ is a transition function on the Riemann surface of the time coordinate; see Definition 2.20.) We can compare the Fatou coordinates Φ_j and Φ_{j+1} by looking at the composition

$$\Psi_j = \begin{cases} \Phi_j \circ T_{-\operatorname{sgn}(j)\frac{i\pi b}{k}} \circ \Phi_{j-\operatorname{sgn}(j)}^{-1}, & \text{for } j \text{ odd;} \\ \Phi_{j-\operatorname{sgn}(j)} \circ T_{\operatorname{sgn}(j)\frac{i\pi b}{k}} \circ \Phi_j^{-1}, & \text{for } j \text{ even;} \end{cases} \quad (2.5.1)$$

where the composition is defined. We set $V_j = \Phi_j(U_j)$ for all j . This yields a diffeomorphism defined on a domain of V_j (resp. V_{j+1}) containing an upper-half plane (resp. lower half-plane) with its image in V_{j+1} (resp. V_j) also containing some upper-half plane (resp. lower-half plane). We call it a *transition function*.

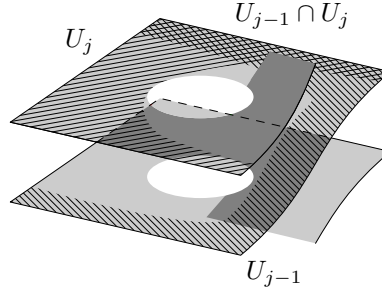


Figure 11. Charts U_{j-1} and U_j on the time coordinate. They intersect on a region containing (in this case) an upper half-plane.

Definition 2.24. Let Φ_j be a Fatou coordinate of f on U_j . The transition functions (equivalent to the Écalte horn maps) of f are the $2k$ functions Ψ_j for $j = 1, \dots, k$ and $j = -1, \dots, -k$ obtained from Equation (2.5.1) where the composition is defined. See Figure 12

Notice the order of the composition for Ψ_j in (2.5.1): we choose the convention that these functions will go from a repulsive petal to an attractive petal. Figure 12 is an illustration of the direction of the arrows in the z -coordinate for $k = 3$, where ξ_j is the expression of Ψ_j in the z -coordinate.

By the uniqueness of Proposition 2.23, we may change $\Phi_{\pm j}$ by $T_{C_j} \circ \Phi_j$ and $T_{\bar{C}_j} \circ \Phi_{-j}$ for some $C_j \in \mathbb{C}$ for $j = 1, \dots, k-1$, or Φ_j by $T_{R_j} \circ \Phi_j$ for some $R_j \in \mathbb{R}$ for $j = 0, k$. This will yield another set of $2k$ transition functions. We will identify together these different possible choices of transition functions at the end of this section.

The following proposition is the first step towards the geometric invariant. The transition functions allow to describe the space of orbits of F and $F \circ F$.

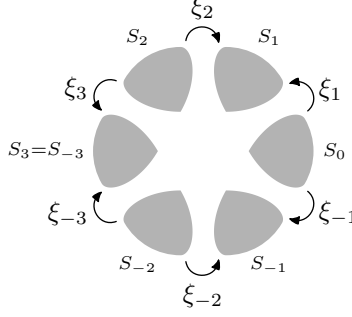


Figure 12. Direction of the transition functions $\{\xi_j\}_j$, where ξ_j is the expression of Ψ_j in the z -coordinates.

Proposition 2.25. *Let $(\Psi_{-k}, \dots, \Psi_{-1}, \Psi_1, \dots, \Psi_k)$ be transition functions of f . They satisfy the equation*

$$\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi_j = \Psi_{-j} \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}. \quad (2.5.2)$$

In particular, they are transition functions of $f \circ f$ and satisfy

$$T_1 \circ \Psi_j = \Psi_j \circ T_1. \quad (2.5.3)$$

PROOF. The proof is identical to the holomorphic case; it follows from the definition of Ψ_j and (2.4.3). \square

Equation (2.5.2) says that the orbits of $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$ in one Fatou coordinate are sent by the Ψ_j on the orbits of $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$ in another Fatou coordinate. In those coordinates, the orbits of $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$ correspond to those of f . Therefore, the transition functions allow to identify the same orbits of f in different coordinates.

We can rewrite Equation (2.5.2) as

$$\Psi_{-j} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi_j \circ \Sigma \circ T_{-\frac{1}{2}}, \quad (2.5.4)$$

so that Ψ_{-j} is determined by Ψ_j . Thus we only need half of the transition functions of f to determine all of them. For the rest of the paper, we will work with Ψ_1, \dots, Ψ_k , knowing that $\Psi_{-1}, \dots, \Psi_{-k}$ are obtained from Equation (2.5.4).

The transition functions in the holomorphic case are well known and their properties are described in [10] by Ilyashenko. Because the transition functions of f are also those of $f \circ f$, they share the properties which we describe now.

Each Ψ_j satisfies Equation (2.5.3); it follows that $\Psi_j - id$ is 1-periodic and has a Fourier expansion

$$\begin{aligned}\Psi_j(W) - W &= c_j + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,j} e^{2i\pi n W} \quad \text{for } j > 0 \text{ odd;} \\ \Psi_j(W) - W &= c_j + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_{n,j} e^{2i\pi n W} \quad \text{for } j > 0 \text{ even.}\end{aligned}\tag{2.5.5}$$

In particular, we see that $|\Psi_j - id - c_j|$ is exponentially decreasing when $\Im W \rightarrow \infty$ and j is odd (resp. $\Im W \rightarrow -\infty$ and j is even).

Since the Fatou coordinates are not unique, we may change them and obtain new transition functions. This will change the constants c_j and $c_{n,j}$, but the following alternating sum will always be preserved

$$\begin{aligned}(-1)^{k-1}c_{-k} + (-1)^{k-2}c_{-k+1} \pm \cdots - c_{-2} + c_{-1} \\ - c_1 + c_2 - \cdots + (-1)^{k-1}c_{k-1} + (-1)^k c_k = 2i\pi b.\end{aligned}\tag{2.5.6}$$

We successively change Φ_1 by $T_{-c_1 - \frac{i\pi b}{k}} \circ \Phi_1$, Φ_2 by $T_{-c_1 + c_2 - \frac{2i\pi b}{k}}$, Φ_3 by $T_{-c_1 + c_2 - c_3 - \frac{3i\pi b}{k}} \circ \Phi_3$, and so on. The constant terms of the new transition functions will satisfy,

$$c_j = \begin{cases} -\frac{i\pi b}{k}, & \text{for } j > 0 \text{ odd;} \\ \frac{i\pi b}{k}, & \text{for } j > 0 \text{ even.} \end{cases}\tag{2.5.7}$$

for $j = 1, 2, \dots, k$. Note that, together with Equation (2.5.4), the constant terms c_j for $j = -k, \dots, -1$ are given by $c_j = \overline{c_{-j}}$.

Definition 2.26 (Normalized transition functions). *The transition functions (Ψ_1, \dots, Ψ_k) are said to be normalized if the constant terms c_j of Equation (2.5.5) satisfy (2.5.7) for $j = 1, 2, \dots, k$.*

Even when normalized, the transition functions are not uniquely determined. There is still a remaining degree of freedom: we may change the source and target space of each Ψ_j by the same translation T_C , with $C \in \mathbb{R}$.

In the case of even codimension, if f is prenormalized, then $f_1(z) = -f(-z)$ is also prenormalized, and f and f_1 are conjugate. Hence, we will need to identify their moduli.

Definition 2.27 (Modulus of classification). *We define the equivalence relation \sim on normalized transition functions of the form (2.5.5) by*

$$(\Psi_1, \dots, \Psi_k) \sim (\Psi'_1, \dots, \Psi'_k) \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \Psi_j = T_C \circ \Psi'_j \circ T_{-C}.\tag{2.5.8}$$

The modulus of classification of f of codimension k (and of positive type when k is even) (see Def. 2.6) is defined by the triple $(k, b, [\Psi_1, \dots, \Psi_k])$, where k is the codimension (Def. 2.4), b

is the formal invariant (Def. 2.9), and $[\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ is the equivalence class of normalized transition functions of f (Defs. 2.24 and 2.26), where the equivalence class is defined according to the following two cases:

1. If k is odd, then $[\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ is the equivalence class under the Relation (2.5.8);
2. If k is even, then $[\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ is the equivalence under the Relation (2.5.8) and the additional relation

$$(\Psi_1, \dots, \Psi_k) \cong (\Psi'_1, \dots, \Psi'_k) \iff \Psi'_j = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi_{k-j+1} \circ \Sigma \circ T_{-\frac{1}{2}}. \quad (2.5.9)$$

This equivalence class is called the analytic invariant.

2.5.1. Remarks on the Écalte-Voronin Modulus

In the holomorphic case, the modulus of classification is known as the *Écalte-Voronin modulus* (see [10] and [11]). For any holomorphic parabolic germ g (not necessarily of the form $g = f \circ f$), we can obtain its Écalte-Voronin modulus the same way as described above, but without equation (2.5.2), so that the $2k$ transition functions are needed. There are $2k$ degrees of freedom, so we normalize the transition functions by choosing the constant terms as in (2.5.7) and with $c_{-j} = -c_j$; the remaining degree of freedom is a translation in every Fatou coordinate by a constant $C \in \mathbb{C}$. Therefore, we quotient by the equivalence relation

$$\begin{aligned} (\Psi_{-k}, \dots, \Psi_{-1}, \Psi_1, \dots, \Psi_k) &\sim_{\mathbb{C}} (\Psi'_{-k}, \dots, \Psi'_{-1}, \Psi'_1, \dots, \Psi'_k) \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{C}, \Psi_j = T_C \circ \Psi'_j \circ T_{-C} \\ &\text{for } j \in \{-k, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, k\}. \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

We also quotient by the action of the rotations of order k . If we note the indices $\Psi_{-j} = \Psi_{2k-j+1}$ for $j = 1, \dots, k$, then we have the identification

$$\begin{aligned} (\Psi_{k+1}, \dots, \Psi_{2k}, \Psi_1, \dots, \Psi_k) \\ \sim (\Psi'_{k+1+2m}, \dots, \Psi'_{2k+2m}, \Psi'_{1+2m}, \dots, \Psi'_{k+2m}) \\ \text{for } m = 0, \dots, k-1, \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

where indices are mod $2k$. We will note the equivalence class of both of these identifications by $[\Psi_{-k}, \dots, \Psi_{-1}, \Psi_1, \dots, \Psi_k]$. The modulus of g is then $(k, b, [\Psi_{-k}, \dots, \Psi_{-1}, \Psi_1, \dots, \Psi_k])$.

We describe the link between the Écalte-Voronin modulus of g and the modulus of classification of an antiholomorphic parabolic germ f of positive type such that $g = f \circ f$, when such a f exists. For k odd (resp. k even), the symmetry axis of f appears along one of the k (resp. $\frac{k}{2}$) “symmetry axes” of g of the form $e^{\frac{2i\ell\pi}{k}}\mathbb{R}$, $\ell = 0, \dots, k-1$. Therefore, we associate to the analytic invariant of g the regular k -gon with the k symmetry axes $e^{i\ell\pi/k}\mathbb{R}$ (see Figure 13) in the following way. Divide the k -gon by its k symmetry axes to produce $2k$ sectors in the k -gon, then starting with the sector above the horizontal line on the

right side, we identify this sector with Ψ_1 and going anti-clockwise, we associate $\Psi_2, \dots, \Psi_k, \Psi_{-k}, \dots, \Psi_{-1}$ to the subsequent sectors, as in Figure 13. The dihedral group D_{2k} acts on the sectors of the k -gon. The action is defined for an element $u \in D_{2k}$ by mapping a sector to its image by the linear application represented by u (a rotation or a reflection).

Definition 2.28. Let $u \in D_{2k}$ and let Δ_j be the sector of the k -gon associated with Ψ_j . The action of u on the sectors of the regular k -gon defines a permutation on $\{-k, \dots, -1, 1, \dots, k\}$ also noted u by abuse of notation, defined so that $u^{-1}(\Delta_j) = \Delta_{u(j)}$ (see Figure 13).

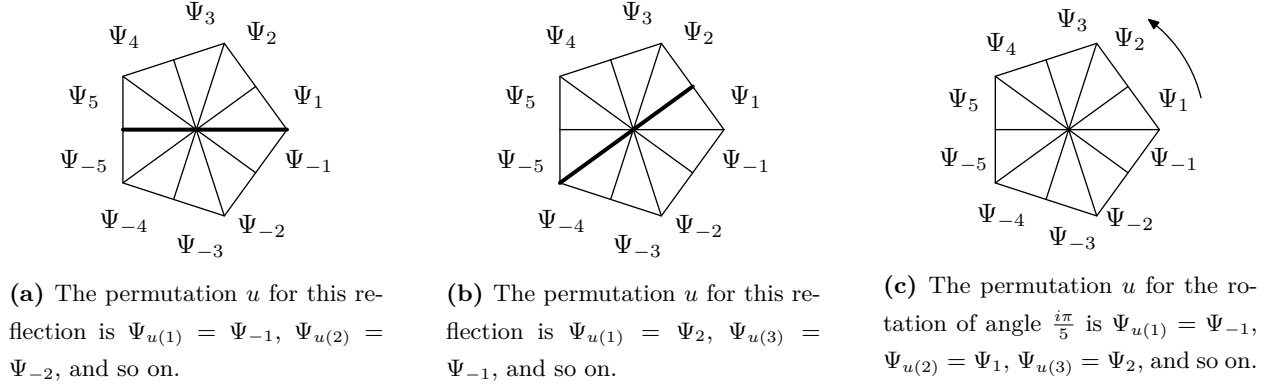


Figure 13. Pentagon with 10 sectors and the transition functions, for codimension 5, with the symmetry axis of f in bold in (a) and (b).

Let $(\Psi_{-k}, \dots, \Psi_{-1}, \Psi_1, \dots, \Psi_k)$ be a representative of the analytic invariant of g . Let us suppose that the symmetry axis of f is along the reflection axis of $s \in D_{2k}$. We rotate the coordinate by, say, an angle of $\frac{2\ell i\pi}{k}$, so that the symmetry axis corresponds to the (repulsive) real axis (this is possible because f is of positive type). The rotation corresponds to an element $r \in D_{2k}$ and a permutation of indices, thus we obtain $r^{-1}sr = s_0$, where $s_0(j) = -j$ is the permutation for s in the new coordinate. The representative of the modulus of g is permuted: $(\Psi_{r(-k)}, \dots, \Psi_{r(-1)}, \Psi_{r(1)}, \dots, \Psi_{r(k)})$ as in (2.5.11); it now has an equivalent representative $(\Psi'_{r(-k)}, \dots, \Psi'_{r(-1)}, \Psi'_{r(1)}, \dots, \Psi'_{r(k)})$ under Relation (2.5.10) obtained from the Fatou coordinates of f , so that it satisfies

$$\Psi'_{r(j)} \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi'_{r(-j)}.$$

or equivalently

$$\Psi'_j \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi'_{s(j)}. \quad (2.5.12)$$

The analytic invariant of f is then $[\Psi'_{r(1)}, \dots, \Psi'_{r(k)}]$.

Lastly, we will talk about the modulus of the inverse of a holomorphic parabolic germ g . The following proposition is probably well-known, but we could not find it in the literature, so the proof is included.

Proposition 2.29. *Let g be a holomorphic parabolic germ. Let the modulus of g be $(k, b, [\Psi_{-k}, \dots, \Psi_{-1}, \Psi_1, \dots, \Psi_k])$. Then the modulus of g^{-1} is given by*

$$(k, -b, [\tilde{\Psi}_{-k}, \dots, \tilde{\Psi}_{-1}, \tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k]), \quad (2.5.13)$$

where $\tilde{\Psi}_j$ stands for $L_{-1} \circ \Psi_{r_1^{-1}(j)}^{-1} \circ L_{-1}$, with $L_{-1}: Y \mapsto -Y$ and with r_1 , the rotation of the indices induced by $y \mapsto e^{\frac{i\pi}{k}} y$ (see Definition 2.28).

PROOF. Suppose g is prenormalized. The dynamics of g^{-1} is reversed, therefore the dynamics of g^{-1} in the first sector S_0 is attractive, but the dynamics in S_{-1} is repulsive. We apply the change of coordinate $y = L_\lambda(z) = \lambda z$, where $\lambda = e^{\frac{i\pi}{k}}$. Let $\tilde{g}^{-1} = L_\lambda \circ g^{-1} \circ L_\lambda^{-1}$.

At the formal level, we apply $(z, t) \mapsto (y, -t)$ to the vector field (2.2.3) to obtain

$$\dot{y} = w(y) = \frac{y^{k+1}}{1 - by^k}. \quad (2.5.14)$$

The formal normal form of \tilde{g}^{-1} is the time-1 map w^1 of (2.5.14). In particular, \tilde{g}^{-1} has formal invariant $-b$. We will denote the sectors of \tilde{g}^{-1} in the y -coordinate by \tilde{S}_j . Note that $\tilde{S}_j = L_\lambda^{-1}(S_j) = S_{j-1}$.

The time coordinate on the sector \tilde{S}_j is defined as

$$Y_j(y) = \frac{-1}{ky^k} - b \log y + \frac{j\pi b}{k}. \quad (2.5.15)$$

We have the relation $L_{-1} \circ Y_j = Z_{j-1} \circ L_\lambda^{-1}$, where the Z_j 's are the time coordinates of g . Indeed, we see that

$$Z_{j-1}(e^{\frac{-i\pi}{k}} y) = \frac{1}{ky^k} + b \log y - \frac{i\pi b}{k} - \frac{(j-1)\pi b}{k} = -Y_j(y).$$

Let Φ_j be a Fatou coordinate of g in S_j . We know that $\Phi_j \circ Z_j \circ g^{-1} \circ Z_j^{-1} \circ \Phi_j^{-1} = T_{-1}$. We will show that $L_{-1} \circ \Phi_j \circ L_{-1}$ is a Fatou coordinate of \tilde{g}^{-1} on \tilde{S}_{j+1} . Indeed, we have

$$\begin{aligned} (L_{-1} \circ \Phi_j \circ L_{-1}) \circ Y_{j+1} \circ \tilde{g}^{-1} \circ Y_{j+1}^{-1} \circ (L_{-1} \circ \Phi_j \circ L_{-1})^{-1} \\ = L_{-1} \circ \Phi_j \circ Z_j \circ g^{-1} \circ Z_j^{-1} \circ \Phi_j^{-1} \circ L_{-1} \\ = L_{-1} \circ T_{-1} \circ L_{-1} = T_1. \end{aligned}$$

Using Equation (2.5.1) (with $-b$ instead of b), it follows that the transition functions $\tilde{\Psi}_j$ of \tilde{g}^{-1} are given by, for $j \neq 1, k, j$ odd,

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_j &= \tilde{\Phi}_j \circ T_{\text{sgn}(j) \frac{i\pi b}{k}} \circ (\tilde{\Phi}_{j-\text{sgn}(j)})^{-1} \\ &= L_{-1} \circ \Phi_{j-1} \circ T_{\text{sgn}(j) \frac{i\pi b}{k}} \circ \Phi_{j-1-\text{sgn}(j-1)}^{-1} \circ L_{-1} \\ &= L_{-1} \circ \Psi_{j-1}^{-1} \circ L_{-1}. \end{aligned}$$

The other values of j are done similarly. Note however that for $j = 1$, the equation becomes $\tilde{\Psi}_1 = L_{-1} \circ \Psi_{-1}^{-1} \circ L_{-1}$, and that for $j = k$, we have $\tilde{\Psi}_{-k} = L_{-1} \circ \Psi_k^{-1} \circ L_{-1}$. \square

2.6. Space of Orbits and Classification Under Analytic Conjugacy

When two antiholomorphic parabolic germs are analytically conjugate, it is clear that their space of orbits are essentially the same. Our guiding principle is that *the space of orbits completely describes the dynamics of the germs*; when two germs have the same space of orbits, they should be analytically conjugate. A formal statement will be given in the form of the Classification Theorem 2.32 in Section 2.6.3.

2.6.1. Description of the Space of Orbits

The space of orbits in the holomorphic case is well known. It is briefly described in [10]. We will introduce the objects from the holomorphic case needed for the antiholomorphic description.

In each Fatou coordinate of f (and $f \circ f$), we may choose a fundamental domain of $g = f \circ f$ by taking any vertical strip B_j of width 1. We quotient by the action of T_1 , obtaining the bi-infinite Écalles cylinders. Some orbits of g will appear in two consecutive cylinders. Since $\Psi_j \circ T_1 = T_1 \circ \Psi_j$, we identify together those orbits by identifying W_j with $\Psi_j(W_j)$ (or $\Psi_j^{-1}(W_j)$ depending on j).

The universal covering $E: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ given by $w = E(W) = \exp(-2i\pi W)$ is a biholomorphism of each cylinder onto \mathbb{C}^* . This allows us to see the Écalles cylinders as Riemann spheres $\mathbb{S}_j^2 \setminus \{0, \infty\}$ punctured at 0 and infinity (see Figure 14). We will define the horns maps using this universal covering.

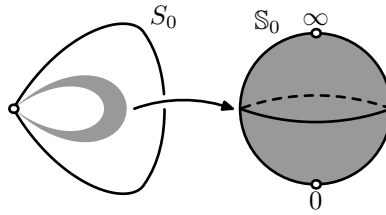


Figure 14. A fundamental domain obtained by $Z_0^{-1}(B_0)$ in the z -coordinate (in gray) and the sphere it represents

Definition 2.30. The horns maps ψ_j , for $j = 1, \dots, k$, are defined by $\psi_j = E \circ \Psi_j \circ E^{-1}$, where Ψ_j is a transition function and

$$E(W) = \exp(-2i\pi W). \quad (2.6.1)$$

For positive j odd (resp. j even), the horn maps are defined on a punctured neighbourhood of the origin (resp. of infinity) with their image in a neighbourhood punctured of the origin (resp. of infinity). By the Riemann Removable Singularity Theorem, they extend to

$$\psi_j: \begin{cases} (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0), & \text{for } j > 0 \text{ odd;} \\ (\mathbb{C}, \infty) \rightarrow (\mathbb{C}, \infty), & \text{for } j > 0 \text{ even.} \end{cases}$$

To retrieve the ψ_j for $j < 0$, we use Equation (2.5.4) in the coordinate $w = E(W)$

$$\psi_{-j} = L_{-1} \circ \tau \circ \psi_j \circ L_{-1} \circ \tau, \quad (2.6.2)$$

where $L_{-1}(w) = -w$ and $\tau(w) = \frac{1}{w}$.

The space of orbits of $g = f \circ f$ is described by the $2k$ spheres with identifications at the origin or at infinity, as seen in Figure 15.

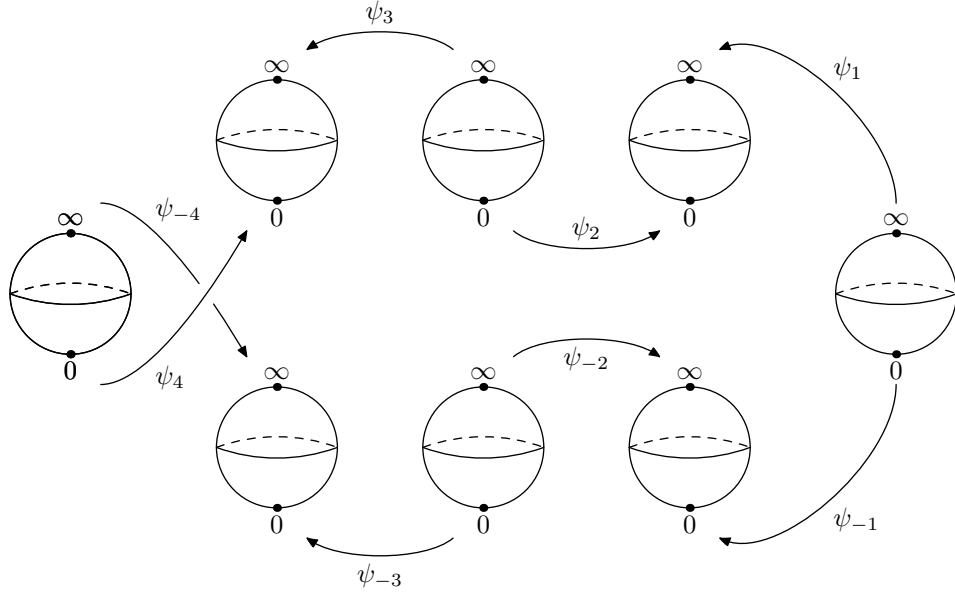


Figure 15. Space of orbits for $f \circ f$ of codimension 4

Remark 2.31. By differentiating $E \circ \Psi_j \circ E^{-1}$, we obtain

$$\begin{aligned} (\psi_j)'(\infty) &= e^{2\pi^2 b/k} & \text{for } j \text{ odd;} \\ (\psi_j)'(0) &= e^{2\pi^2 b/k} & \text{for } j \text{ even;} \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

so the product of those derivatives for $j \in \{-k, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, k\}$ is $e^{4\pi^2 b}$.

2.6.2. The space of orbits of f

The complex conjugation Σ becomes $\tau(w) = \frac{1}{\bar{w}}$ on the spheres, where $w \in \mathbb{S}_j^2$ and $\tau(w) \in \mathbb{S}_{-j}^2$. The translation $T_{\frac{1}{2}}$ becomes $L_{-1}(w) = -w$. In the Fatou coordinates, f is

$\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$, so that on the spheres, f is $L_{-1} \circ \tau(w) = -\frac{1}{w}$. To obtain the space of orbits of f , we identify w and $L_{-1} \circ \tau(w)$ in the space of orbits of $f \circ f$, that is on the $2k$ spheres above.

Let us first consider the case of codimension 1, so that we have two sectors S_0 and $S_1 = S_{-1}$ in the z -coordinate and two spheres \mathbb{S}_0^2 and \mathbb{S}_1^2 . Recall that for $z \in S_0$, $f^{-1}(z)$ is still in S_0 . This means that $L_{-1} \circ \tau$ acts on \mathbb{S}_0^2 . It sends 0 to ∞ , the northern hemisphere to the southern hemisphere, and the equator on itself. On the equator $|w| = 1$, we identify w to $-w$. The resulting surface is the real projective space \mathbb{RP}^2 . This is also true for S_1 and \mathbb{S}_1^2 . The equators of both spheres play a special role; they each represent orbits along an invariant half-curve that each forms a “semi-axis” of reflection for f .

Therefore, in codimension 1, the space of orbits is two real projective spaces with one germ of holomorphic diffeomorphism

$$[\psi_1]: (\mathbb{RP}^2, [0]) \rightarrow (\mathbb{RP}^2, [0]),$$

where $[\psi_1]$ is the equivalence class of ψ_1 under the quotient of \mathbb{S}^2 to \mathbb{RP}^2 and $[0]$ is equivalence class of the points $\{0, \infty\}$ identified together. The class $[\psi_1]$ is well-defined since $\psi_1 \circ L_{-1} \circ \tau = \tau \circ L_{-1} \circ \psi_{-1}$.

In codimension $k > 1$, the spheres \mathbb{S}_0 and \mathbb{S}_k both quotient to a real projective space, but the other spheres are identified in pairs $(\mathbb{S}_j, \mathbb{S}_{-j})$, so that the quotient of the union of the two spheres is diffeomorphic to a sphere. The space of orbits is then described by two real projective spaces together with $k - 1$ spheres and k equivalence classes of horn maps $[\psi_j] = \{\psi_j, \psi_{-j}\}$. The class $[\psi_j]$ defines a germ at $[0] = [\infty]$ on the quotiented spheres $(\mathbb{S}_j, \mathbb{S}_{-j})$, since the representatives satisfy $\psi_j \circ L_{-1} \circ \tau = L_{-1} \circ \tau \circ \psi_{-j}$.

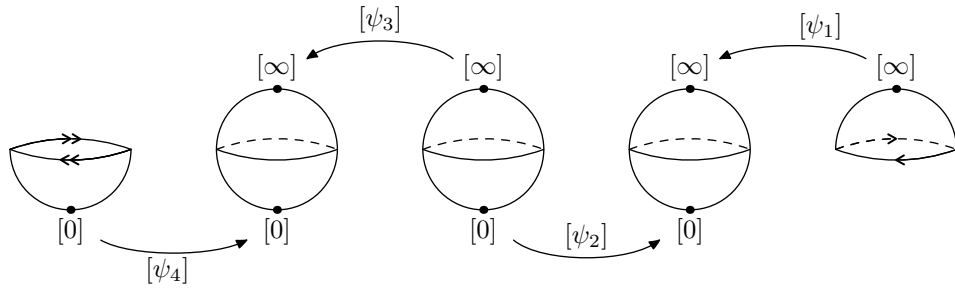


Figure 16. The space of orbits of f in codimension 4

On the two extreme projective spaces we have a distinguished curve given by the equator. The only changes of coordinates on \mathbb{D} preserving the equator and sending opposite points to opposite points are the linear maps L_c with $|c| = 1$. Hence the lines $\Im W = y$ are invariant. This y is the generalization of the *Écalle height* introduced in [9]. However, on the other spheres, there does not appear to be a quantity preserved by changes of coordinates.

The two projective spaces correspond to the orbits of two Fatou petals containing the formal symmetry axis of f . The equator of each projective space corresponds to a semi-axis of symmetry in each respective petal. These axes meet at the origin, but generally they cannot be extended into a real analytic curve. We will see in Theorem 2.38 exactly when they extend into a real analytic curve. This formal symmetry axis explains the existence of the Écalte height in the two projective spaces and why the Écalte height does not exist in the other spheres.

2.6.3. Classification Under Analytic Conjugacy

We can now state and prove the main theorem of this paper.

Classification Theorem 2.32. *For antiholomorphic parabolic germs of codimension k (and of positive type when k is even), we have:*

1. *The modulus of classification is a complete invariant of analytic classification under holomorphic conjugacy;*
2. *The moduli space is the set of $(k, b, [\Psi_1, \dots, \Psi_k])$, where the constant terms of Ψ_j satisfy (2.5.7), and $[\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ is the equivalence class under the Relation (2.5.8) (and (2.5.9) for k even).*

PROOF. The proof is analogous to that in the holomorphic case, which can be found in [10] and [11].

1. Let $f_\ell: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ be a germ of antiholomorphic diffeomorphism with a parabolic fixed point at the origin and let $(k_\ell, b_\ell, [\Psi_{1,\ell}, \dots, \Psi_{k_\ell,\ell}])$ be its modulus of classification, for $\ell = 1, 2$. We can of course suppose that f_ℓ is prenormalized.

Suppose first that $f_2(u) = h \circ f_1 \circ h^{-1}(u)$ for some germ of analytic diffeomorphism $u = h(z)$. The germs f_1 and f_2 must have the same codimension and formal invariant, since they are topological and formal invariants. For the analytic invariant, first let F_1, F_2 and H denote the expressions of f_1, f_2 and h in the time coordinate. If Φ_j is a Fatou coordinate of F_2 on U_j , then $\Phi_j \circ H$ is a Fatou coordinate of F_1 . It follows that they have the same transition functions.

Conversely, suppose f_1 and f_2 have the same modulus. We can choose a common normalized representative (Ψ_1, \dots, Ψ_k) for both classes and Fatou coordinates $\Phi_{j,\ell}$ for f_ℓ ($\ell = 1, 2$), such that the Ψ_j are the transition maps for these Fatou coordinates. Let $\varphi_{j,\ell} = Z_j^{-1} \circ \Phi_{j,\ell} \circ Z_j$, for $\ell = 1, 2$, be the expression of Fatou coordinates in the z -coordinate. Then we define

$$h_j(z) = \varphi_{j,1}^{-1} \circ \varphi_{j,2}(z)$$

on S_j . It sends the orbits of f_2 to those of f_1 on S_j . On the intersection of two consecutive sectors $S_j \cap S_{j+1}$, we see that

$$h_{j+1} \circ h_j^{-1}(z) = id,$$

so the h_j 's agree on the intersection. We may define h on $\bigcup_j S_j$ by $h(z) = h_j(z)$ if $z \in S_j$. It sends a punctured neighbourhood of the origin into another punctured neighbourhood of the origin, so by the Riemann Bounded Extension Theorem, h extends to a holomorphic diffeomorphism of a neighbourhood of the origin.

Finally, we see that $h \circ f_2 = f_1 \circ h$ since it sends the orbits of f_2 to the orbits of f_1 on a whole neighbourhood of the origin.

2. The proof is in two steps. First we construct an abstract Riemann surface S on which $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$ is well defined and we prove that this surface has the conformal type of a punctured disk. Then we prove that $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$ is the germ we are looking for on the disk.

Consider a triple $(k, b, [\Psi_1, \dots, \Psi_k])$. We must find a parabolic germ of antiholomorphic diffeomorphism with this modulus of classification.

Let (Ψ_1, \dots, Ψ_k) be a representative of the analytic invariant and let $\Psi_{-1}, \dots, \Psi_{-k}$ be the other transition functions obtained from (2.5.4). Let $\sigma \circ v^{\frac{1}{2}}$ be the normal form of codimension k with formal invariant b . Let U_j be the charts in the time coordinate of v .

We consider the transition functions defined on those charts. More precisely, Ψ_1 is defined on a domain of U_0 containing an upper-half plane with its image in U_1 ; Ψ_2 is defined on a domain of U_2 containing a lower half-plane with its image in U_1 , and so on. We define the Riemann surface S by

$$S = \bigsqcup_{j=-k}^k U_j / \sim$$

where \sim identifies $W_j \in U_j$ with its image by Ψ_j or Ψ_{j-1} (depending on j). As it is done in [11], we can build a smooth quasi-conformal mapping $P: S \rightarrow \mathbb{C}^*$, and from the Ahlfors-Bers Theorem (see [1]), find a diffeomorphism $Q: D \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, where $D = P(S) \cup \{0\}$, so that the composition $H = Q \circ P: S \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ is holomorphic. In fact, H is a biholomorphism of S onto some punctured disk of the origin.

By (2.5.2), we know that $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$ is well defined on S . The map $f = H \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ H^{-1}$ extends to the origin by $f(0) = 0$, since it is bounded around 0 (we can apply the Riemann Removable Singularity Theorem to $f \circ \sigma$ to see this). Lastly, T_1 is also well-defined on S , so we set $g = H \circ T_1 \circ H^{-1}$. Since $T_1 = (\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}) \circ (\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}})$, it follows that $g = f \circ f$, and by the chain rule, $|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}|^2 = g'(0)$. By the holomorphic case, we know g is a holomorphic parabolic germ of codimension k , so it follows that f is parabolic and of codimension k . The formal invariant of f is b , since it is determined by (2.5.6).

It remains only to prove that f is of positive type. The formal symmetry axis of f is the real line, since the Ψ_1 and Ψ_{-1} are defined on U_0 and $\Psi_j \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi_{-j}$. Moreover, the petal S_0 of f is repulsive, since $H|_{U_0} \circ Z_0: U_0 \rightarrow U_0$ is a Fatou coordinate of f and U_0 contains a half-plane $\{\Re Z < R\}$, i.e. S_0 contains all the backward iterates of f . Therefore, f is of positive type.

We conclude f is a germ with modulus $(k, b, [\Psi_1, \dots, \Psi_k])$. \square

2.7. Applications of the Classification Theorem

Here we will solve Questions 1 to 5 of the introduction and other related questions.

2.7.1. Embedding in a Flow or the Complex Conjugate of a Flow

If a holomorphic germ g is conjugate to the normal form, that is $g = h \circ v^1 \circ h^{-1}$, then it is embedded in the family $g_t = h \circ v^t \circ h^{-1}$. Similarly, we will say that f is *embeddable* if it is embedded in the family $f_t := h \circ \sigma \circ v^t \circ h^{-1}$. When is an antiholomorphic parabolic germ embeddable? This corresponds to Question 3. The answer is read in the modulus of classification.

Theorem 2.33 (Embedding in a flow). *An antiholomorphic parabolic germ f is analytically conjugate to its normal form (i.e. embeddable) if and only if the transition functions of f are translations.*

PROOF. The transition functions of the normal form are translations since the time charts Z_j are Fatou coordinates. Therefore, it follows from the Classification Theorem 2.32. \square

In Proposition 2.2, we proved that f is always formally conjugate to the sum of a formal germ with real coefficients. We ask the related question.

Question 2.34. When is a parabolic antiholomorphic germ analytically conjugate to a germ with real coefficients?

Of course, this is the case for any embeddable germ. But we will show in Section 2.7.3 that the embeddable germs form a subset of infinite codimension in the set of antiholomorphic parabolic germs conjugate to a germ with real coefficients. We will answer this question in Section 2.7.3. We first tackle Question 1.

2.7.2. Antiholomorphic n -th Root Problem

Question 1 and its restatement Question 2.17, as well as Question 2.18, are concerned with the existence of antiholomorphic roots and their uniqueness.

Theorem 2.35 (Antiholomorphic Root Extraction Problem). *Let g be a holomorphic parabolic germ and let $(k, b, [\Psi_{-k}, \dots, \Psi_{-1}, \Psi_1, \dots, \Psi_k])$ be its Écalle-Voronin modulus (see Section 2.5.1), then*

1. g has k one-parameter families of formal antiholomorphic n -th roots, one for each of the k formal axes of reflection;
2. g has an antiholomorphic n -th root (n even) tangent to the formal symmetry axis $e^{\frac{i\pi\ell}{k}}\mathbb{R}$ if and only if there exists a representative $(\Psi_{-k}, \dots, \Psi_{-1}, \Psi_1, \dots, \Psi_k)$ of the equivalence relation (2.5.10) which has a symmetry property with respect to the formal symmetry axis $e^{\frac{i\pi\ell}{k}}\mathbb{R}$, namely

$$\Psi_j \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{n}} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{n}} \circ \Psi_{s_\ell(j)}, \quad (2.7.1)$$

where s_ℓ is the reflection of indices with respect to $e^{\frac{i\pi\ell}{k}}\mathbb{R}$ (see Definition 2.28);

3. If g is not analytically conjugate to its normal form, then
 - i) Each family has at most one convergent root, so g has at most k distinct antiholomorphic n -th roots f_j ;
 - ii) If g has m distinct antiholomorphic roots $f_{\ell_1}, \dots, f_{\ell_m}$ with distinct linear parts $e^{\frac{2i\pi\ell_j}{k}}\bar{z}$, $j = 1, \dots, m$, then the modulus of g has $\gcd(\ell_m - \ell_1, \dots, \ell_m - \ell_{m-1}, k)$ independent transition functions.

PROOF. 1. That g has a 1-parameter family of formal antiholomorphic n -th root on each symmetry axis is a consequence of the fact that g is formally conjugate to the normal form v^1 , and Proposition 2.16.

2. We first prove this for the case k odd. Let

$$\Psi = (\Psi_{-k}, \dots, \Psi_{-1}, \Psi_1, \dots, \Psi_k)$$

be a representative of the analytic invariant of g .

First, we suppose that the representative satisfies (2.7.1). To realize an antiholomorphic root tangent to the symmetry axis $e^{\frac{2i\pi\ell}{k}}\mathbb{R}$, we rotate the coordinate by $R_\ell(z) = e^{-\frac{2i\pi\ell}{k}}z$ so that this axis is on the real line and the dynamics of $R_\ell \circ g \circ R_\ell^{-1}$ on the side of the positive real axis is repulsive. Let $g_\ell = R_\ell \circ g \circ R_\ell^{-1}$ and let r correspond to the permutation of indices defined by R_ℓ (see Definition 2.28). The representative is permuted into $(\Psi_{r(-k)}, \dots, \Psi_{r(-1)}, \Psi_{r(1)}, \dots, \Psi_{r(k)})$. Also, we have that $r^{-1}s_\ell r = s_0$, where $s_0(j) = -j$ and s_ℓ is the reflection of indices induced by σ_ℓ . Equation (2.7.1) becomes

$$\Psi_{r(j)} \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi_{r(-j)}.$$

Now we may repeat the proof of part two of Theorem 2.32 to obtain an antiholomorphic germ $f_\ell: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ with analytic invariant $[\Psi_{r(1)}, \dots, \Psi_{r(k)}]$ such that f_ℓ is $\Sigma \circ T_{\frac{1}{n}}$ in

each Fatou coordinate of g_ℓ . Since $(\Sigma \circ T_{\frac{1}{n}})^{\circ n} = T_1$ in the Fatou coordinates, it follows that $f_\ell^{\circ n} = g_\ell$.

Conversely, suppose g has an n -th root f_ℓ tangent to the reflection axis $e^{\frac{2i\pi\ell}{k}}\mathbb{R}$. We rotate the coordinate by R_ℓ . Let $f = R_\ell \circ f_\ell \circ R_\ell^{-1}$. Now in every Fatou coordinate of g_ℓ , f has the form $\Sigma \circ T_{\frac{1}{n}+iy}$, by Proposition 2.16. By changing Fatou coordinates, we may obtain $\Sigma \circ T_{\frac{1}{n}}$. Those Fatou coordinates give us a representative $(\Psi'_{-k}, \dots, \Psi'_{-1}, \Psi'_1, \dots, \Psi'_k)$ that is equivalent to Ψ under the Relations (2.5.10) and (2.5.11) and that satisfies

$$\Psi'_j \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi'_{-j}.$$

It follows that $(\Psi'_{r^{-1}(-k)}, \dots, \Psi'_{r^{-1}(-1)}, \Psi'_{r^{-1}(1)}, \dots, \Psi'_{r^{-1}(k)})$ is a representative equivalent to Ψ under Relation (2.5.10) which satisfies (2.7.1), using the fact that $(r^{-1}s_\ell r)(j) = -j$.

In the case k even, we may have antiholomorphic roots of positive and negative type. Those of positive type are tangent to an axis $e^{\frac{i\pi\ell}{k}}\mathbb{R}$ with ℓ even and are done as before. Those of negative type are tangent to an axis $e^{\frac{i\pi\ell}{k}}\mathbb{R}$ with ℓ odd. For such a root f_ℓ , f_ℓ^{-1} will be a root of positive type of g^{-1} . By Proposition 2.29, the modulus of g^{-1} is

$$(k, -b, [\tilde{\Psi}_{-k}, \dots, \tilde{\Psi}_{-1}, \tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k]),$$

where $\tilde{\Psi}_j = L_{-1} \circ \Psi_{r_1^{-1}(j)}^{-1} \circ L_{-1}$ and r_1 is the rotation of indices induced by $z \mapsto e^{\frac{i\pi}{k}}z$. By the previous two paragraphs, g^{-1} has an n -th antiholomorphic root of positive type tangent to $e^{\frac{i\pi\ell}{k}}\mathbb{R}$ if and only if there exists a representative $(\tilde{\Psi}_{-k}, \dots, \tilde{\Psi}_{-1}, \tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k)$ such that

$$\tilde{\Psi}_j \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{n}} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{n}} \circ \tilde{\Psi}_{s_\ell(j)},$$

By simplifying the L_{-1} and taking the inverse on both sides, we obtain (2.7.1).

3. *i)* Suppose g has two roots f_1 and f_2 from the same family. In particular, they have the same linear term, so we may suppose they are tangent to σ , modulo conjugating g by a rotation of order k . In the Fatou coordinates, they take the form $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}+iy_j}$, for $j = 1, 2$, by Proposition 2.16. Since $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}+iy_j}$ satisfies (2.5.2) for $j = 1, 2$, and by combining with (2.5.5), we see that either $y_1 = y_2$ or the Ψ_j 's are translations.

ii) Lastly, consider the dihedral group D_{2k} with its action on the regular k -gon. Recall that we can divide a regular k -gon by its k symmetry axes to form $2k$ sectors, which we associate to the transition functions (see Section 2.5.1 and Figure 13).

Let $H = \langle s_1, \dots, s_m \rangle$ be the subgroup of D_{2k} generated by the reflections along the symmetry axes of $f_{\ell_1}, \dots, f_{\ell_m}$. Each element of H acts on the modulus by introducing relations of the type

$$\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi_j = \Psi_{s_\ell(j)} \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}},$$

thus reducing the number of independent Ψ_j (see Figure 17). The orbit by H of a sector represents the transition functions tied together, therefore the number of independent transition functions corresponds to $|D_{2k} : H|$. To compute this, we first observe that H must itself be a dihedral group, so that $H = D_{2j}$ for some j (see [8]). In fact, j is given by

$$j = \frac{k}{\gcd(\ell_m - \ell_1, \dots, \ell_m - \ell_{m-1}, k)},$$

since any rotation $s_m s_p$ has order $k / \gcd(\ell_m - \ell_p, k)$. It follows that $|D_{2k} : H| = \gcd(\ell_m - \ell_1, \dots, \ell_m - \ell_{m-1}, k)$. \square

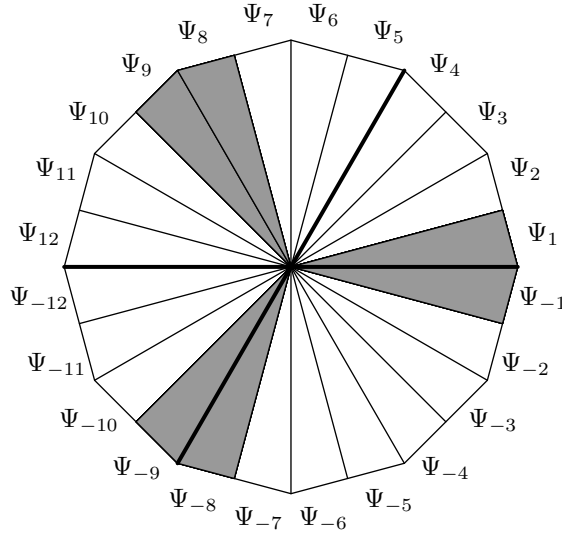


Figure 17. The orbit of one sector by the subgroup H generated by two reflections (bold axes) in codimension 12.

Theorem 2.36. *Let $f: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ be an antiholomorphic parabolic germ of codimension k , and of positive type when k is even. Let $(k, b, [\Psi_1, \dots, \Psi_k])$ be the modulus of f and let $n \geq 3$ be an odd number. Then f has a single antiholomorphic formal n -th root (n odd). Moreover, f has an antiholomorphic n -root (n odd) if and only if*

$$\Psi_j \circ T_{\frac{1}{n}} = T_{\frac{1}{n}} \circ \Psi_j. \quad (2.7.2)$$

PROOF. That f has a unique formal n -th root follows from Proposition 2.16.

For the second part, f has an antiholomorphic n -th root if and only if the transition functions satisfy $\Psi_j \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2n}} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2n}} \circ \Psi_{-j}$, since we may realize $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2n}}$ on the Riemann surface of $f \circ f$. We combine this last equation with (2.5.2) to obtain $\Psi_j \circ T_{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2}} = T_{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2}} \circ \Psi_j$. To conclude, we note that $\gcd(1 - n, 2n) = 2$ because n is odd, so there exists $p, q \in \mathbb{Z}$ such that $(1 - n)p - 2nq = 2$. In other words, we have $\frac{1}{n} = \frac{(1-n)}{2n}p - q$. Since Ψ_j commutes with $T_{\frac{(1-n)}{2n}p}$ and with T_q (because q is an integer), it follows that Ψ_j commutes with $T_{\frac{1}{n}}$. \square

Corollary 2.37. *f has an antiholomorphic n -th root for n odd if and only if f is the square root of g and g has a holomorphic n -th root, with n odd.*

PROOF. Equation (2.7.2) is independent of the representative and it is equivalent to a holomorphic parabolic germ having a holomorphic n -th root (see [10]).

Suppose $g = f \circ f$ and g has a holomorphic n -th root. Then the modulus of g and f satisfies (2.7.2), so that f has an antiholomorphic n -th root.

The converse is direct. □

2.7.3. Germs with an Invariant Real Analytic Curve

An antiholomorphic germ with real coefficients preserves the real axis. Any germ f analytically conjugate to the latter will preserve a real analytic curve; it is a property of the equivalence class of f . Therefore, Question 2.34 is equivalent to asking when does an antiholomorphic parabolic germ f preserve a real analytic curve.

Like the embedding problem, to preserve a germ of real axis is a condition of codimension infinity, but it is a “smaller” infinity, i.e. not every transition functions needs to be a translation, but we will see that there are infinitely many conditions of the form $c_{n,j} = \overline{c_{-n,-j}}$ for the Fourier coefficients in (2.5.5).

Theorem 2.38. *Let $f: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ be an antiholomorphic parabolic germ and $(k, b, [\Psi_1, \dots, \Psi_k])$ be its modulus of classification. The following statements are equivalent*

1. *f preserves a real analytic curve at the origin;*
2. *f is analytically conjugate to a germ with real coefficients;*
3. *each representative (Ψ_1, \dots, Ψ_k) satisfies $\Psi_j \circ T_{\frac{1}{2}} = T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi_j$;*
4. *each representative (Ψ_1, \dots, Ψ_k) satisfies $\Psi_j \circ \Sigma = \Sigma \circ \Psi_{-j}$, where Ψ_{-j} is defined by (2.5.4).*

PROOF. 1. \Rightarrow 2. Let γ be the germ of real analytic parametrization of the invariant curve of f . We can extend γ on a disk around the origin. Then $\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma$ fixes a germ of the real axis, so its power series has real coefficients.

2. \Rightarrow 3. We can of course suppose that the power series of f has real coefficients, so that $\sigma \circ f = f \circ \sigma$. It follows that $\sigma \circ f$ is a holomorphic square root of $g = f \circ f$. Therefore, we have $\Psi_j \circ T_{\frac{1}{2}} = T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi_j$.

3. \Leftrightarrow 4. It follows from equation (2.5.2).

4. \Rightarrow 1. This is the harder part of the proof. The hypothesis implies that Σ is well defined on the Riemann surface S constructed in the proof of part 2 of the Classification Theorem 2.32. Let $z = H(W)$ be the coordinate given by $H: S \rightarrow (\mathbb{C}, 0) \setminus \{0\}$, the biholomorphism of S to a punctured neighbourhood of the origin. Let σ' and f' be the expression of Σ and

$\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$ in this coordinate (note that f and f' are analytically conjugate). Since on S , Σ and $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$ commute, it follows that σ' and f' commute also. So it remains only to show that σ' preserves a germ of real analytic curve at the origin.

We can extend σ' by $\sigma'(0) = 0$ by the Riemann Removable Singularity Theorem (this is true for antiholomorphic functions, since we simply apply it to $\sigma' \circ \sigma$, where $\sigma(z) = \bar{z}$). In the charts U_0 and U_k , Σ fixes the real axis. These two curves carry in the z -coordinate and meet at the origin to form a continuous curve γ fixed by σ' . In fact, γ is a C^1 curve, as H can be extended to a C^1 diffeomorphism $\tilde{H}: \tilde{S} \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, where \tilde{S} is obtained from S with the point $\infty = H^{-1}(0)$ added.

This curve divides a small disk $D(0, \delta)$ in two connected components A and B . By the Riemann Mapping Theorem, there exists a biholomorphism φ of A to the upper half-plane that sends continuously the boundary of A on the real line, see Figure 18. The image of γ corresponds to an interval $[a, b]$. We can extend φ to $A \cup \gamma \cup B$ by

$$\tilde{\varphi}(z) = \begin{cases} \varphi(z) & \text{if } z \in A \cup \gamma; \\ \sigma \circ \varphi \circ \sigma'(z) & \text{if } z \in B. \end{cases}$$

This is holomorphic on B , since it is the composition of a holomorphic map with two antiholomorphic maps, and it is continuous on $A \cup \gamma \cup B$.

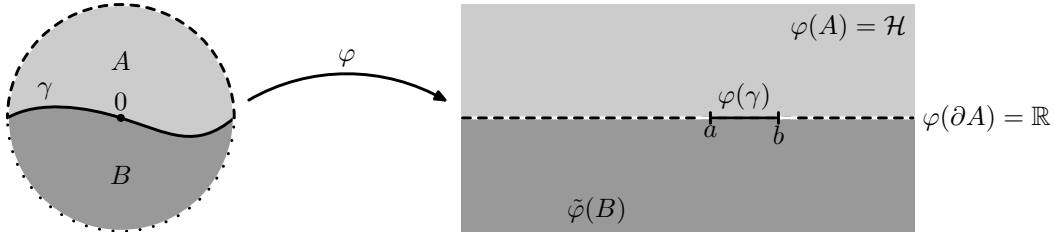


Figure 18. Mapping φ extended on $A \cup \gamma \cup B$

The argument to prove that $\tilde{\varphi}$ is holomorphic is similar to that of the Schwarz Reflection Principle. The idea is to show that the integral of $\tilde{\varphi}$ along any triangle in $A \cup \gamma \cup B$ vanishes, and it will follow from Morera's theorem. If a simple closed curve is in $A \cup \gamma$ or $B \cup \gamma$, then it follows from Cauchy's theorem (we may take a limit of closed curves in A or B converging to the initial one). Then, we can divide any triangle in $A \cup \gamma \cup B$ along γ to obtain a finite number of closed curves in $A \cup \gamma$ and in $B \cup \gamma$, as in Figure 19. Thus, $\tilde{\varphi}|_{(a,b)}^{-1}$ is a real analytic parametrization of γ . \square

When f is conjugate to a germ with real coefficients, then so is the holomorphic germ $g = f \circ f$. However, it is not true that every holomorphic germ analytically conjugate to a germ with real coefficients must have a germ f such that $g = f \circ f$, as the next theorem will show (see also Proposition 2.40). Even though this is not a property directly linked to the

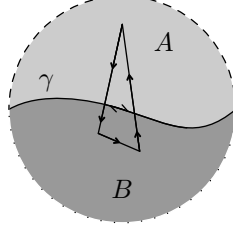


Figure 19. Triangle divided in two closed curves

antiholomorphic parabolic germs, we will still prove the following necessary and sufficient condition for a holomorphic parabolic germ to preserve a real analytic curve.

Theorem 2.39. *Let $g: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ be a parabolic holomorphic germ and let $(k, b, [\Psi_{-k}, \dots, \Psi_{-1}, \Psi_1, \dots, \Psi_k])$ be its Écalle-Voronin modulus (see Section 2.5.1). The following statements are equivalent*

1. g preserves a germ of real analytic curve at the origin;
2. g is analytically conjugate to a germ with real coefficients;
3. For each representative $(\Psi_{-k}, \dots, \Psi_{-1}, \Psi_1, \dots, \Psi_k)$, there exists $y \in \mathbb{R}$ such that the transition functions satisfy $\Sigma \circ T_{iy} \circ \Psi_j = \Psi_{-j} \circ \Sigma \circ T_{iy}$;
4. There exists a representative $(\Psi_{-k}, \dots, \Psi_{-1}, \Psi_1, \dots, \Psi_k)$ such that $\Psi_j \circ \Sigma = \Sigma \circ \Psi_{-j}$.

PROOF. 1. \Rightarrow 2. and 4. \Rightarrow 1. are the same as in the previous theorem.

2. \Rightarrow 3. Suppose g is in a coordinate such that $g = \sigma \circ g \circ \sigma$. Let Φ_j be a Fatou coordinate on U_j for $-k \leq j \leq k$, where $\Phi_{-k} = \Phi_k$. Then $\Sigma \circ \Phi_{-j} \circ \Sigma$ is also a Fatou coordinate of g on U_j . By the uniqueness of the Fatou coordinate (for the holomorphic case), there exists a constant $C \in \mathbb{C}$ such that

$$\Sigma \circ \Phi_{-j} \circ \Sigma \circ \Phi_j^{-1} = T_C$$

for all j . In particular, for $j = 0$, by taking the inverse and conjugating both sides by Σ of the previous equation, we obtain $T_C = T_{\overline{C}}$, so C must be pure imaginary, say iy with $y \in \mathbb{R}$. For $j > 0$ and odd, we conclude with

$$\Psi_j = \Phi_j \circ \Phi_{-j}^{-1} = T_{-iy} \circ \Sigma \circ \Phi_{-j} \circ \Phi_{-j+1}^{-1} \circ \Sigma \circ T_{iy} = T_{-iy} \circ \Sigma \circ \Psi_{-j} \circ \Sigma \circ T_{iy}.$$

The other values of j are done similarly.

3. \Leftrightarrow 4. It follows from the fact that for any two representatives $(\Psi_{-k}, \dots, \Psi_{-1}, \Psi_1, \dots, \Psi_k)$ and $(\Psi'_{-k}, \dots, \Psi'_{-1}, \Psi'_1, \dots, \Psi'_k)$, there exists $C \in \mathbb{C}$ such that $\Psi_j \circ T_C = T_C \circ \Psi'_j$. We choose $C = -\frac{iy}{2}$ to get a representative satisfying $\Psi'_j \circ \Sigma = \Sigma \circ \Psi'_{-j}$. \square

Proposition 2.40. *There exists g with real coefficients that has no antiholomorphic square root (see Section 2.7.2).*

PROOF. The holomorphic germ realized by the Écalle-Voronin modulus $(1, 0, [W + e^{2i\pi W}, W + e^{-2i\pi W}])$ has no antiholomorphic square root, but preserves a germ of real analytic curve. \square

2.7.4. Centralizer in the Group of Holomorphic and Antiholomorphic Germs

Let $\text{Diff}_1(0, \mathbb{C})$ (resp. $\overline{\text{Diff}_1(0, \mathbb{C})}$) be the set of germs of holomorphic (resp. antiholomorphic) diffeomorphisms with a fixed point at the origin with multiplier 1. Note in particular that an antiholomorphic germ must be tangent to σ . We set

$$\text{Diff}_1(0, \mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}}) = \text{Diff}_1(0, \mathbb{C}) \cup \overline{\text{Diff}_1(0, \mathbb{C})}.$$

It forms a group with $\text{Diff}_1(0, \mathbb{C})$ as a subgroup. Next, let $\mathcal{A}_{k,b} \subset \text{Diff}_1(0, \mathbb{C})$ (resp. $\overline{\mathcal{A}_{k,b}} \subset \overline{\text{Diff}_1(0, \mathbb{C})}$ when b is real) be the set of germs of holomorphic (resp. antiholomorphic) diffeomorphisms with a parabolic fixed point of codimension k at the origin and with formal invariant b .

We will study the centralizer of $g \in \mathcal{A}_{k,b}$ and of $f \in \overline{\mathcal{A}_{k,b}}$ in $\text{Diff}_1(0, \mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}})$. Let us note the following: if $g \in \mathcal{A}_{k,b}$ commutes with $f \in \overline{\text{Diff}_1(0, \mathbb{C})}$, then the formal invariant b of g is automatically real. In fact, we have that g and $\sigma \circ g \circ \sigma$ are analytically conjugate by means of $(\sigma \circ f)$. So we are interested only in b real, since if b is not real, the centralizer of g in $\text{Diff}_1(0, \mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}})$ is the same as the centralizer of g in $\text{Diff}(0, \mathbb{C})$, which is already known (see [10]).

Lemma 2.41. *Let $g \in \mathcal{A}_{k,b}$ and let $m \in \text{Diff}_1(0, \mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}})$ be a germ that commutes with $g \in \mathcal{A}_{k,b}$. Then either m is the identity, or analytically conjugate to σ , or $m \in \mathcal{A}_{k,b} \cup \overline{\mathcal{A}_{k,b}}$. Moreover, in the Fatou coordinates of g , m will be of the form*

$$T_C \quad \text{or} \quad \Sigma \circ T_C \quad \text{for } C \in \mathbb{C}. \quad (2.7.3)$$

PROOF. If m is not the identity or analytically conjugate to σ , then m is parabolic. It must have codimension k , since it maps the orbits of g on the orbits of g and the Fatou petals of g on the Fatou petals of g . To see that m has the same formal invariant, we compare degree by degree the power series on both sides of the equation $m \circ g(z) = g \circ m(z)$.

To see m has one of the forms of (2.7.3), the first part of the proof of Proposition 2.23 applies almost identically to m . \square

The obvious germs in the centralizer of f or g are the iterates, the roots, and the iterates of the roots, which we define below as the *fractional iterates*. We prove in Theorem 2.43 and 2.44 that these are all the possible elements of the centralizer, provided that f or g are not conjugate to their respective normal form.

Definition 2.42. *Let $f \in \overline{\mathcal{A}_{k,b}}$ (resp. $g \in \mathcal{A}_{k,b}$). We say that $m \in \text{Diff}_1(0, \mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}})$ is a fractional iterate of order p of f (resp. g) if there exists $q \in \mathbb{Z}$ such that $\gcd(p, q) = 1$ and $m^{\circ p} = f^{\circ q}$ (resp. $m^{\circ p} = g^{\circ q}$).*

Note that a fractional iterate of order one is just an iterate of f or of g .

Theorem 2.43. *Let $g \in \mathcal{A}_{k,b}$ with $b \in \mathbb{R}$. Then we have one of the following cases:*

1. *g is embeddable, i.e. $g = h \circ v^1 \circ h^{-1}$. Let $g_t = h \circ v^t \circ h^{-1}$. Then the centralizer of g is*

$$Z_g = \{g_t \mid t \in \mathbb{C}\} \cup \{h \circ \sigma \circ v^t \circ h^{-1} \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

2. *g is not embeddable, then Z_g contains only holomorphic and antiholomorphic fractional iterates of g and Schwarz reflections. More precisely, there exists $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ such that the centralizer of g is one of the following:*

$$\begin{aligned} \text{--- } Z_g &= \bigcup_{d|p} \{\text{fractional iterates of order } d \text{ of } g\}, \\ \text{--- } Z_g &= \bigcup_{d|p} \{\text{hol. fractional iterates of order } d \text{ of } g\} \cup \\ &\quad \bigcup_{\substack{d|2p \\ d \text{ even}}} \{\text{antihol. fractional iterates of order } d \text{ of } g\}, \\ \text{--- } Z_g &= \bigcup_{d|p} \{\text{hol. fractional iterates of order } d \text{ of } g\} \cup \\ &\quad \bigcup_{\substack{d|p \\ d \text{ even}}} \{\text{antihol. fractional iterates of order } d \text{ of } g\} \\ &\quad \cup \{\text{Schwarz reflection tangent to } \sigma\}. \end{aligned}$$

The centralizer includes a Schwarz reflection tangent to σ if and only if g is analytically conjugate to a germ with real coefficients (see Theorem 2.39).

PROOF. 1. Since g is embeddable, each of its transition functions is a translation, so any T_t will commute with them. Each T_t represents a germ analytically conjugate to g^t for some $t \in \mathbb{C}$. In the case m is antiholomorphic, $\Sigma \circ T_t$ is compatible with the transition functions with no restriction on t . It corresponds to $h \circ \sigma \circ v^t \circ h^{-1}$ for $t \in \mathbb{C}$.

2. Since g is not embeddable, one of the transition functions is not a translation. Suppose $g_1 \in \text{Diff}_1(0, \mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}})$ is holomorphic and commutes with g . By Lemma 2.41, g_1 becomes T_t in the Fatou coordinates for some $t \in \mathbb{C}$. Then T_t must commute with the transition functions. This will only happen if the transition functions expand in the form

$$\Psi_j(W) = W + (-1)^j \frac{i\pi b}{k} + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} c_{\ell p, j} e^{2i\pi \ell p W} \quad (2.7.4)$$

and $t = \frac{a}{p}$ for some $a, p \in \mathbb{N}$. This corresponds to g_1 being a holomorphic fractional iterate of order p of g . Let p denote the maximal order of holomorphic roots of g .

Suppose $f_1 \in \text{Diff}_1(0, \mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}})$ is antiholomorphic and commutes with g . We can suppose f_1 is not a Schwarz reflection, since this is covered in Theorem 2.39. Then by Lemma 2.41,

f_1 is $\Sigma \circ T_t$ in the Fatou coordinates and it must be compatible with the transition functions. Therefore, $T_{2\Re t}$ commutes with the Ψ_j 's, and by the previous case, we have $2\Re t = \frac{a}{r}$, with $\gcd(a, r) = 1$ and $r \mid p$. We have $\Sigma \circ T_t \circ \Psi_j = \Psi_{-j} \circ \Sigma \circ T_t$ for some representative of the modulus if and only if

$$\overline{c_{n,j}} = e^{-i\pi an/r} e^{2n\pi y} c_{-n,-j} \quad (2.7.5)$$

and $t = \frac{a}{2r} + iy$ ($y \in \mathbb{R}$), where $c_{n,j}$ are the Fourier coefficients of Ψ_j from (2.5.5). Of course, generically there exists no y that satisfy (2.7.5), so there are no antiholomorphic germs that commute with g in the generic case. When such a y exists, by changing the Ψ_j 's by $T_{-\frac{iy}{2}} \circ \Psi_j \circ T_{\frac{iy}{2}}$, we can suppose $y = 0$.

Since $T_{\frac{1}{p}}$ commutes with the Ψ_j 's, we have $c_{n,j} = 0$ if $p \nmid n$, so that (2.7.5) becomes $\overline{c_{sp,j}} = e^{-i\pi sap/r} c_{-sp,-j}$.

If p/r and a are odd, then (2.7.5) becomes

$$\overline{c_{sp,j}} = \begin{cases} -c_{sp,j}, & s \text{ odd}, \\ c_{sp,j}, & s \text{ even}. \end{cases}$$

This is precisely the condition for g to have an antiholomorphic root of order $2p$.

If p/r or a is even, then $e^{-i\pi asp/r} = 1$ for all s , so we obtain the condition necessary for Σ to be compatible with the transition functions, and then there is a Schwarz reflection in the centralizer of g . In that case, then the highest orders of the holomorphic and antiholomorphic iterates coincide. \square

Lastly, we will study the centralizer of $f \in \overline{\mathcal{A}_{k,b}}$ in $\text{Diff}_1(0, \mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}})$. Of course, we have $Z_f \subseteq Z_{f \circ f}$, so the details are similar to the previous theorem.

Theorem 2.44. *Let $f \in \overline{\mathcal{A}_{k,b}}$. Then we have one of the following cases:*

1. *f is embeddable, i.e. $f = h \circ \sigma \circ v^{\frac{1}{2}} \circ h^{-1}$, then its centralizer is*

$$Z_f = \{h \circ v^t \circ h^{-1} \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{h \circ \sigma \circ v^t \circ h^{-1} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

2. *f is not embeddable, then Z_f contains only holomorphic and antiholomorphic fractional iterates of f and Schwarz reflections. More precisely, there exists $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ such that the centralizer of f is one of the following:*

— *if p is odd, then*

$$Z_f = \bigcup_{d \mid p} \{\text{hol. fractional iterates of order } d \text{ of } f \circ f\} \cup \bigcup_{\substack{d \mid p \\ d \text{ odd}}} \{\text{antihol. fractional iterates of order } d \text{ of } f\};$$

— if p is even, then

$$Z_f = \bigcup_{d|p} \{\text{hol. fractional iterates of order } d \text{ of } f \circ f\} \cup \\ \bigcup_{\substack{d|p \\ d \text{ odd}}} \{\text{antihol. fractional iterates of order } d \text{ of } f\}; \\ \cup \{\text{Schwarz reflection tangent to } \sigma\}.$$

The centralizer includes a Schwarz reflection tangent to σ if and only if f is analytically conjugate to a germ with real coefficients (see Theorem 2.38).

PROOF. 1. In the Fatou coordinates, T_t must commute with $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$, so t must be real. The rest of the details are exactly as in the proof of Theorem 2.43.

2. Let $p \in \mathbb{N}$ be the highest order of the holomorphic roots of $f \circ f$. This number might be 1, in which case Z_f contains only iterates of f . Indeed, if $p = 1$, Z_f does not contain a Schwarz reflection, otherwise $f \circ f$ would have the holomorphic root $\sigma \circ f$, which would contradict that the highest order of the holomorphic root is 1. Let us suppose that $p > 1$.

Let (Ψ_1, \dots, Ψ_k) be a representative of the analytic invariant of f . Let Ψ_{-j} be determined by (2.5.4) for $j = 1, \dots, k$. Suppose that the transition functions have a Fourier expansion

$$\Psi_j(W) = W + C_j + \sum_n c_{n,j} e^{2i\pi n W},$$

for all j , where $\overline{C_{-j}} = C_j = (-1)^j \frac{i\pi b}{k}$ for $j > 0$. Because the Ψ_j 's satisfy $\Psi_j \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi_{-j}$, we obtain

$$\overline{c_{n,j}} = e^{i\pi n} c_{-n,-j}. \quad (2.7.6)$$

Since $f \circ f$ has a root of order p , we also have $T_{\frac{1}{p}} \circ \Psi_j = \Psi_j \circ T_{\frac{1}{p}}$, which means that $c_{n,j} = 0$ for all j when $p \nmid n$. If we write $n = \ell p$ in (2.7.6), it becomes

$$\overline{c_{\ell p,j}} = e^{i\pi \ell p} c_{-\ell p,-j}, \quad (\ell \in \mathbb{Z}).$$

We have two cases.

If p is odd, then we have

$$\overline{c_{\ell p,j}} = \begin{cases} c_{-\ell p,-j} & \text{if } \ell \text{ is odd,} \\ -c_{-\ell p,-j} & \text{if } \ell \text{ is even.} \end{cases}$$

This corresponds to the necessary condition for f to have an antiholomorphic p -th root. Therefore, the maximal order of antiholomorphic root of f is at least p . To see that it is exactly p , we simply note that if f_1 is an antiholomorphic root of order $q \geq p$, then $f_1 \circ f_1$ is a holomorphic root of order q of $f \circ f$, and because p is maximal, we must have $p = q$. We must also prove that antiholomorphic fractional iterates of $f \circ f$ are fractional iterates of f .

Suppose $f \circ f$ has an antiholomorphic root of order q , where q must be even. Then we have $\frac{q}{2} \mid p$. Since p is odd, we know that $\frac{q}{2}$ must be odd. It follows that $(\Sigma \circ T_{\frac{1}{q}})^{\circ \frac{q}{2}} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$.

If p is even, then we have $\overline{c_{n,j}} = c_{-n,-j}$, which corresponds to the condition necessary for Σ to be compatible with the Ψ_j 's. In this case, the centralizer of f contains a Schwarz reflection, and it follows that the highest order of antiholomorphic fractional iterates of f and the highest order of holomorphic fractional iterates of $f \circ f$ coincide.

□

Deuxième partie

Déformations de germes antiholomorphes
paraboliques de codimension 1

Chapitre 3

Forme préparée

Soit f_0 un germe antiholomorphe parabolique de la forme

$$f_0(z) = \bar{z} + \frac{1}{2}\bar{z}^2 + o(\bar{z}^2). \quad (3.0.1)$$

Les objets d'étude principaux sont les déformations

$$f_\eta(z) = a_0(\eta) + (1 + a_1(\eta))\bar{z} + \left(\frac{1}{2} + a_2(\eta)\right)\bar{z}^2 + o(\bar{z}^2)$$

de $f_0(z)$ par un paramètre complexe $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, où η_1 et η_2 sont réels. On entame l'étude avec deux paramètres réels, mais on verra à la section 3.2 qu'il y a un paramètre réel canonique et un paramètre supplémentaire. On montrera un peu plus : une déformation générique peut se ramener à une forme, dite *préparée*, qui dépend du paramètre canonique et qui a les mêmes points fixes ou orbites périodiques et les mêmes dérivées en ces points que la forme normale. Cette forme préparée jouera un rôle central pour comparer les déformations de f_0 entre elles.

Avant de se diriger vers la forme préparée, on devra décider du type de dépendance du paramètre de f_η . Dans le cas holomorphe, il est naturel de demander une dépendance holomorphe d'un paramètre complexe η . Or dans notre cas, ce genre de dépendance n'est pas compatible avec la composition de fonctions. La composée $f_\eta \circ f_\eta$ ne dépendra plus de η de façon holomorphe en général.

On utilisera plutôt une dépendance réelle analytique des paramètres η_1 et $i\eta_2$. Ce type de dépendance, précisée à la section 3.1, est compatible avec la composition, comme on le verra. On énoncera également une version du théorème de préparation de Weierstrass adaptée à l'analyticité réelle. Ceci sera utilisée ensuite pour trouver une forme préparée de f_η .

Avec la forme préparée, il sera bien plus facile de décrire le diagramme de bifurcation. Ceci sera fait à la section 3.2.2.

3.1. Fonctions analytiques de variables réelles et complexes

Commençons par quelques notions sur les fonctions de plusieurs variables complexes et sur les fonctions analytiques de plusieurs variables réelles ou complexes. On peut se référer au livre de Henri Cartan [5].

Définition 3.1.1. Soit $U \subseteq \mathbb{C}^m$ un domaine (ouvert connexe). Une fonction continue $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ des variables $z = (z_1, \dots, z_m) \in U$ est dite holomorphe si elle est continûment différentiable en tout point et si df est \mathbb{C} -linéaire pour tout $z \in U$, c'est-à-dire

$$df = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j, \quad \text{pour tout } z \in U.$$

Notons dès maintenant qu'il n'est pas nécessaire que les dérivées soient continues. En effet, ceci découle de la formule de Cauchy.

Proposition 3.1.2 (Formule de Cauchy, [5]). Soit $f(z_1, \dots, z_m)$ une fonction continue sur un polydisque fermé $\overline{D}^m(0, r) = \overline{D}(0, r_1) \times \dots \times \overline{D}(0, r_m)$, où $r_j > 0$. Si f est holomorphe séparément par rapport à z_1, \dots, z_m , alors on a

$$f(z_1, \dots, z_m) = \int_{\partial D(0, r_m)} \dots \int_{\partial D(0, r_1)} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_m) d\zeta_1 \dots d\zeta_m}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_m - z_m)}.$$

Corollaire 3.1.3. Une fonction continue f des variables (z_1, \dots, z_m) sur un domaine $U \subseteq \mathbb{C}^m$ est holomorphe sur U si et seulement si elle est holomorphe séparément par rapport à z_1, \dots, z_m .

Le corollaire précédent s'obtient en échangeant la dérivée avec l'intégrale dans la formule de Cauchy. Il nous sera particulièrement utile, car pour vérifier qu'une fonction continue f est holomorphe, on vérifiera que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \equiv 0$$

sur le domaine pour $j = 1, \dots, m$.

On rappelle la définition de fonctions analytiques dans les cas complexe et réel. On utilisera la convention standard des multi-indices, à savoir pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$, on pose $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_m^{\alpha_m}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^m$.

Définition 3.1.4. Soit $U \subseteq \mathbb{C}^m$ un domaine et soit $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de $z \in U$. La fonction f est dite analytique si pour tout $z^* \in U$, il existe un polydisque $D^m(z^*, \rho) \subseteq U$, où $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)$ avec $\rho_j > 0$, tel que $f(z)$ possède un développement en série convergente de la forme

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_\alpha (z - z^*)^\alpha$$

pour tout $z \in D^m(z^*, \rho)$, où a_α est un nombre complexe.

Soit maintenant $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et soit $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue de $t \in V$. Elle est dite *réelle analytique* si pour tout $t^* \in V$, il existe un rectangle $R^n(t^*, r)$, où $r = (r_1, \dots, r_n)$ avec $r_j > 0$, tel que $g(t)$ possède un développement en série convergente de la forme

$$g(t) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} b_\beta (t - t^*)^\beta$$

pour tout $t \in R^n(t^*, r)$, où b_β est complexe.

Les fonctions que l'on considérera pour la suite dépendront de quelques variables complexes de façon holomorphe ou antiholomorphe et de quelques variables réelles de façon analytique. On combine ainsi les définitions et résultats ci-haut.

Définition 3.1.5. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $V \subseteq \mathbb{C}^m$ des domaines et soit $f: U \times V \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est *analytique mixte* (resp. *anti-analytique mixte*) si pour tout $(t^*, z^*) \in U \times V$, il existe un rectangle $R = R^n(t^*, r) \subseteq U$ et un polydisque $P = D^m(z^*, \rho) \subseteq V$, où $r_j, \rho_\ell > 0$, tels que $f(t, z)$ se développe en une série convergente sur $R \times P$ de la forme

$$f(t, z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} a_{\alpha, \beta} (t - t^*)^\alpha (z - z^*)^\beta, \quad (3.1.1)$$

ou, respectivement, de la forme

$$f(t, z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} a_{\alpha, \beta} (t - t^*)^\alpha (\bar{z} - \bar{z}^*)^\beta,$$

où α et β sont des multi-indices et où $a_{\alpha, \beta} \in \mathbb{C}$.

Une application $g: U \times V \rightarrow \mathbb{C}^d$ est *analytique mixte* (resp. *anti-analytique mixte*) si chacune de ses composantes $g_1, \dots, g_d: U \times V \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique mixte (resp. anti-analytique mixte).

Remarque 3.1.6. Si f telle que dans la définition est analytique mixte, alors en complexifiant les variables réelles $t = (t_1, \dots, t_n)$, on obtient une fonction holomorphe. Réciproquement, si l'on restreint quelques variables d'une fonction holomorphe aux réels, alors on obtient une fonction analytique mixte.

Si f est anti-analytique mixte, un raisonnement semblable fonctionne toujours. On peut complexifier les variables réelles $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ et obtenir une fonction holomorphe en t et antiholomorphe en z . Réciproquement, une fonction $(t, z) \mapsto f(t, z)$ holomorphe en t et antiholomorphe en z possède sur chaque polydisque de son domaine un développement en série en termes de t et \bar{z} , puisque la fonction $(t, z) \mapsto f(t, \bar{z})$ est holomorphe (voir lemme 3.1.7 ci-bas). (Ici, \bar{z} représente $(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$.) Lorsque l'on restreint la variable t aux réels, alors on obtient une fonction anti-analytique mixte.

Lemme 3.1.7 (Dépendance mixte). Soit $U \subset \mathbb{C}^n$ et $V \subseteq \mathbb{C}^m$ des domaines et soit $f: U \times V \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue de $(t, z) \in U \times V$. Supposons que pour chaque z fixé, $f(\cdot, z)$ est holomorphe. Si pour chaque t fixé, $f(t, \cdot)$ est antiholomorphe, alors $(t, z) \mapsto f(t, \bar{z})$ est holomorphe, où $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$.

Démonstration. Par hypothèse, les dérivées partielles de f par rapport à t_1, \dots, t_n et z_1, \dots, z_m existent et

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z_\ell} = 0$$

pour $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq \ell \leq m$.

On dérive $(t, z) \mapsto f(t, \bar{z})$ par rapport à \bar{z}

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(t, \bar{z}) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}}_{=0} \bullet \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bullet \underbrace{\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}}}_{=0}.$$

Les dérivées partielles de $f(\cdot, \bar{\cdot})$ par rapport à $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n$ et $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m$ sont nulles. On conclut que $f(\cdot, \bar{\cdot})$ est holomorphe. \square

La remarque et le lemme précédents seront utiles pour montrer l'analyticité mixte (resp. l'anti-analyticité mixte), puisqu'il suffit de complexifier t et de montrer respectivement que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\ell}, \frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j} \equiv 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial z_\ell}, \frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j} \equiv 0$$

pour toutes les variables sur un polydisque de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ pour conclure que f est holomorphe en t et holomorphe (resp. antiholomorphe) en z , ce qui est plus simple que de trouver un développement en série en chaque point.

On montre maintenant que lorsqu'on traite t comme un paramètre, l'analyticité mixte et l'anti-analyticité mixte obéissent aux règles de composition comme on le souhaite.

Proposition 3.1.8. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{C}^m$ et $W \subseteq \mathbb{C}^d$ des domaines. Soit $F: U \times V \rightarrow \mathbb{C}^d$ une fonction de $(t, z) \in U \times V$ et $G: U \times W \rightarrow \mathbb{C}^m$ une fonction de $(t, w) \in U \times W$. Lorsque la composition est possible, on a :

1. si F et G sont analytiques mixtes, alors $F \circ (id \times G)$ est analytique mixte ;
2. si F est analytique mixte et G est anti-analytique mixte, alors $F \circ (id \times G)$ et $G \circ (id \times F)$ sont anti-analytiques mixtes ;
3. si F et G sont anti-analytiques mixtes, alors $F \circ (id \times G)$ est analytique mixte.

Démonstration. 1. On complexifie la variable t pour obtenir deux fonctions holomorphes F et G . En dérivant par rapport à \bar{t}_j et \bar{z}_ℓ , on trouve

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}_j} \left(F(t, G(t, w)) \right) = \frac{\partial F}{\partial \bar{t}_j} + \frac{\partial F}{\partial z} \bullet \frac{\partial G}{\partial \bar{t}_j} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \bullet \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{t}_j}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}_\ell} \left(F(t, G(t, w)) \right) = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \bullet \frac{\partial \bar{G}}{\partial w_\ell}.$$

Le côté droit de ces équations est nul, puisque F et G sont holomorphes, en particulier leurs dérivées partielles par rapport à \bar{t}_j et \bar{w}_j sont identiquement nulles. On conclut que $F \circ (id \times G)$ est holomorphe et lorsque l'on restreint t aux réels, la composée est analytique mixte.

2. On complexifie t . Par le lemme 3.1.7, $(t, w) \mapsto G(t, \bar{w})$ est une fonction holomorphe. Il suit que $(t, w) \mapsto F(t, G(t, \bar{w}))$ est holomorphe par le point 1. On conclut que $(t, w) \mapsto F(t, G(t, w))$ est holomorphe en t et antiholomorphe en w . En restreignant t aux réels, $F \circ (id \times G)$ est anti-analytique mixte.

L'autre cas est un peu plus délicat. On montre d'abord que $\overline{F(\cdot, \cdot)}$ est anti-analytique mixte (t est réel). On applique la conjugaison complexe au développement en série de F de la forme (3.1.1) en chaque point (t^*, z^*)

$$\overline{F(t, z)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} \overline{a_{\alpha, \beta}} (t - t^*)^\alpha (\bar{z} - \bar{z}^*)^\beta,$$

d'où l'on voit que $\overline{F(\cdot, \cdot)}$ est anti-analytique mixte.

De la même façon, on conclut que $\overline{G(\cdot, \cdot)}$ est analytique mixte.

Par le point 1, on a que $(t, z) \mapsto \overline{G(t, F(t, z))}$ est analytique mixte, donc $(t, w) \mapsto G(t, F(t, z))$ est anti-analytique mixte.

3. On sait que $\overline{F(\cdot, \cdot)}$ est analytique mixte. Par le point 2, $(t, w) \mapsto \overline{F(t, G(t, w))}$ est anti-analytique mixte. On conclut que $(t, w) \mapsto F(t, G(t, w))$ est analytique mixte. \square

Notation. Sous les mêmes hypothèses que la proposition précédente, pour chaque t , on pose

$$\begin{array}{ccc} f_t: V \rightarrow \mathbb{C}^d & & g_t: W \rightarrow \mathbb{C}^m \\ & \text{et} & \\ z \mapsto F(t, z) & & w \mapsto G(t, w) \end{array}$$

et on définit la composition par $f_t \circ g_t(z) := F(t, G(t, z))$. On dira que f_t et g_t ont une dépendance réelle analytique du paramètre t .

On note que les définitions et résultats ci-haut se transportent aux germes de fonctions.

La version suivante du théorème de préparation de Weierstrass sera utile à la prochaine section pour trouver une forme préparée. La démonstration est habituellement écrite pour une fonction holomorphe de plusieurs variables, mais seulement l'holomorphie d'une des variables est nécessaire. On retranscrit ici la démonstration, mais pour une fonction qui dépend de paramètres réels. La démonstration est prise de [17].

Théorème de préparation de Weierstrass 3.1.9 (version à paramètres réels analytiques). Soit $g: (\mathbb{R}^N, 0) \times (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0); (t, z) \mapsto g(t, z)$ un germe de fonction analytique mixte. Supposons que

$$\frac{\partial^k g}{\partial z^k}(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^n g}{\partial z^n}(0, 0) \neq 0 \quad (k = 1, \dots, n-1),$$

alors il existe un polynôme $P_t(z) = z^n + a_{n-1}(t)z^{n-1} + \dots + a_0(t)$, où $a_j(0) = 0$ et $a_j(t)$ est réel analytique et à valeurs complexes, et un germe de fonction $h: (\mathbb{R}^N, 0) \times (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ réel analytique en t , holomorphe en z et qui satisfait à $h(0, 0) \neq 0$, tels que

$$g(t, z) = P_t(z)h(t, z).$$

Démonstration. On complexifie le paramètre. Ensuite le reste de la démonstration est identique au cas holomorphe.

Soit g une fonction représentant le germe. Elle possède un développement en série sur un certain polydisque $D^N(0, \rho) \times D(0, R)$.

Par le principe du zéro isolé, il existe un disque $D(0, r)$ dans la coordonnée z tel que $g(0, \cdot)$ possède un zéro seulement en $z = 0$. On considère t sur un petit polydisque compact $\overline{D}^N(0, b)$, où chaque b_j est plus petit que le rayon de convergence ρ_j . On pose également $\varepsilon = \inf_{z \in \partial D(0, r/2)} |g(0, z)|$, qui est strictement positif, puisque $g(0, \cdot)$ n'a aucun zéro sur $\partial D(0, \frac{r}{2})$. Par continuité uniforme sur $\overline{D}^N(0, b) \times \partial D(0, r/2)$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|(t, z) - (t', z')| < \delta$, alors

$$|g(t, z) - g(t', z')| < \varepsilon.$$

En prenant $t' = 0$ et $z' = z$, on obtient

$$|g(t, z) - g(0, z)| < \varepsilon \leq |g(0, z)|$$

pour tout $|t| < \delta$ et $z \in \partial D(0, \frac{r}{2})$. Par le théorème de Rouché, $g(0, \cdot)$ et $g(t, \cdot)$ ont exactement le même nombre de zéros dans $D(0, \frac{r}{2})$, à savoir n .

On construit maintenant le polynôme. On pose $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ les n zéros comptés avec multiplicité de $g(t, \cdot)$ et $a_0(t), \dots, a_{n-1}(t)$ les fonctions symétriques élémentaires de ces zéros. On pose aussi

$$P_t(z) = \prod_{j=1}^n (z - \varphi_j(t)) = z^n + a_{n-1}(t)z^{n-1} + \dots + a_0(t).$$

On commence par montrer que P_t est holomorphe en t . Pour ce faire, on utilise

$$S_m(t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(t)^m = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \zeta^m \frac{\frac{\partial}{\partial \zeta} g(t, \zeta)}{g(t, \zeta)} d\zeta,$$

ce qui suit du théorème des résidus, en prenant $\gamma = \partial D(0, r/2)$. On voit que S_m est holomorphe en t puisque c'est le cas de g et $\frac{\partial}{\partial \zeta} g$ dans l'intégrale. Il suit que les a_j sont holomorphes

en t , puisqu'ils s'expriment comme des polynômes en les S_m . Ainsi, P_t est holomorphe en t et donc en (t, z) .

Ensuite, on pose

$$h(t, z) = \frac{g(t, z)}{P_t(z)}.$$

C'est une fonction holomorphe par rapport à z pour chaque t fixé, car les singularités en $z = \varphi_j(t)$ sont apparentes. Ainsi la formule de Cauchy nous donne

$$h(t, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0, r/2)} \frac{g(t, \zeta)}{P_t(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

d'où l'on voit que h est holomorphe en t . (On peut dériver sous l'intégrale.)

En $t = 0$, on a $h(0, z) = g(0, z)/z^n$. Puisque $g(0, \cdot)$ possède un zéro d'ordre n , il suit que $h(0, 0) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n g}{\partial z^n}(0, 0) \neq 0$.

Enfin, on restreint t aux réels pour obtenir l'équation recherchée

$$g(t, z) = P_t(z)h(t, z).$$

□

On s'inspire de la démonstration du théorème précédent pour montrer le résultat suivant, qui sera utilisé un peu plus tard.

Proposition 3.1.10. *Soit $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un domaine et soit $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe des variables (z_1, \dots, z_n) . On pose $g(z_1, \dots, z_n) = f(z_1, \dots, z_n)/z_n$ sur $U' = U \setminus \{z_n = 0\}$. Si g est bornée sur U' , alors g se prolonge en une fonction holomorphe \tilde{g} sur U .*

Démonstration. On utilise la notation $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$. On remarque que pour tout z' fixé, la fonction $g(z', \cdot)$ est holomorphe sur

$$U_{z'} = \{z \in \mathbb{C} \mid (z', z) \in U\},$$

pourvu que $U_{z'}$ soit non vide, puisque $z_n = 0$ n'est qu'une singularité apparente lorsque $0 \in U_{z'}$.

Soit z'_0 fixé telle que $(z'_0, 0) \in U$. On prolonge g sur un voisinage de $(z'_0, 0)$. Par la formule de Cauchy, on a

$$g(z'_0, z_n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{g(z'_0, z)}{z - z_n} dz,$$

où $D = D(0, \delta) \subset U_{z'_0}$ est un petit disque qui est tel que $B(z'_0, r) \times D \subseteq U$, pour un certain $r > 0$. On prolonge g sur le voisinage $B(z'_0, r) \times D$ de $(z'_0, 0)$ par

$$\tilde{g}(z', 0) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{g(z', z)}{z} dz.$$

□

On obtient une autre version du théorème 3.1.9 comme un corollaire.

Corollaire 3.1.11 (Théorème de préparation de Weierstrass, version réelle analytique). Soit $g: (\mathbb{R}^N, 0) \times (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0); (t, x) \mapsto g(t, x)$ un germe de fonction réelle analytique par rapport à t et à x . Supposons que

$$\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(0, 0) \neq 0 \quad (k = 1, \dots, n-1),$$

alors il existe un polynôme $P_t(x) = x^n + a_{n-1}(t)x^{n-1} + \dots + a_0(t)$ à coefficients réels, où $a_j(0) = 0$, et un germe de fonction $h: (\mathbb{R}, 0) \times (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant à $h(0, 0) \neq 0$, tels que

$$g(t, x) = P_t(x)h(t, x).$$

Démonstration. On complexifie la variable x en $z \in \mathbb{C}$, de sorte que l'on peut utiliser le théorème précédent pour obtenir

$$g(t, z) = P_t(z)h(t, z).$$

Soit $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ les zéros de $g(t, \cdot)$. Puisque l'on a complexifié la variable x , on a la relation $g(t, \bar{z}) = \overline{g(t, z)}$. Il suit que $\overline{\varphi_j(t)}$ est aussi un zéro, puisque

$$g(t, \overline{\varphi_j(t)}) = \overline{g(t, \varphi_j(t))} = 0.$$

De plus, $\varphi_j(t)$ et $\overline{\varphi_j(t)}$ ont la même multiplicité, puisque $\frac{\partial^j}{\partial z^j} g(t, z)$ satisfait aussi $\frac{\partial^j}{\partial \bar{z}^j} g(t, \bar{z}) = \overline{\frac{\partial^j}{\partial z^j} g(t, z)}$.

Finalement, on voit que les coefficients $a_j(t)$ de P_t sont à valeurs réelles comme suit. Posons $\alpha_1(t), \overline{\alpha_1(t)}, \dots, \alpha_k(t), \overline{\alpha_k(t)}$ les zéros complexes de P_t et $\beta_1(t), \dots, \beta_\ell(t)$ les zéros réels de P_t . On a

$$P_t(z) = (z - \alpha_1)^{n_1} (z - \overline{\alpha_1})^{n_1} \dots (z - \alpha_k)^{n_k} (z - \overline{\alpha_k})^{n_k} (z - \beta_1)^{m_1} \dots (z - \beta_\ell)^{m_\ell}.$$

Puisque $(x - \alpha_j)^{n_j} (x - \overline{\alpha_j})^{n_j}$ est un polynôme réel, il suit que $x \mapsto P_t(x)$ est un polynôme réel. On voit que h est à valeurs réelles par l'équation

$$h(t, x) = \frac{g(t, x)}{P_t(x)}.$$

□

3.2. Forme préparée des déformations à un paramètre

Maintenant que les outils nécessaires sont définis, on introduit rigoureusement les déformations et la notion d'équivalence. On mentionnera, au passage, les définitions analogues du cas holomorphe. Rappelons qu'un germe parabolique antiholomorphe $f_0: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ de codimension 1 est toujours considéré sous sa forme prénormale

$$f_0(z) = \bar{z} + \frac{1}{2}\bar{z}^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{b}{2}\right)\bar{z}^3 + o(\bar{z}^3). \quad (3.2.1)$$

Définition 3.2.1. 1. Une déformation d'un germe f_0 de la forme (3.2.1) est un germe de fonction anti-analytique mixte $f: (\mathbb{R}^2, 0) \times (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tel que $f(0, 0, z) = f_0(z)$. On la note f_ε , où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}^2$ est noté $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$.

2. Une déformation d'un germe holomorphe parabolique g_0 est un germe de fonction analytique mixte $g: (\mathbb{R}^2, 0) \times (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tel que $g(0, 0, z) = g_0(z)$. On la note g_ε , où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}^2$ est noté $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$.

La définition classique d'une déformation de g_0 demanderait un germe holomorphe de (ε, z) , plutôt qu'analytique mixte. On introduit cette version de déformation, puisque la seconde itérée d'une déformation antiholomorphe sera une déformation d'un germe holomorphe au sens de notre définition.

L'équivalence entre deux déformations se définit comme suit.

Définition 3.2.2. Soit $f_{1,\varepsilon}$ et $f_{2,\eta}$ deux déformations (holomorphes ou antiholomorphes) de f_0 , un germe ayant un point fixe en 0. Les déformations $f_{1,\varepsilon}$ et $f_{2,\eta}$ sont dites équivalentes s'il existe un disque $D(0, r) \subset \mathbb{C}$ et un difféomorphisme (sur son image) analytique mixte $H: (\mathbb{R}^2, 0) \times D(0, r) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0) \times \mathbb{C}$ tels que $H(\varepsilon, z) = (\beta(\varepsilon), h_\varepsilon(z))$ et

$$h_\varepsilon \circ f_{1,\varepsilon} \circ h_\varepsilon^{-1} = f_{2,\beta(\varepsilon)}.$$

Remarque 3.2.3. Soit

$$f_\varepsilon(z) = a_0(\varepsilon) + a_1(\varepsilon)\bar{z} + o(\bar{z})$$

une déformation de f_0 de la forme (3.2.1). En utilisant le difféomorphisme $H: (\varepsilon, z) \mapsto (\beta(\varepsilon), h_\varepsilon(z))$ donné par

$$\begin{cases} \beta(\varepsilon) = \varepsilon, \\ h_\varepsilon(z) = \sqrt{a_1(\varepsilon)}z =: w, \end{cases}$$

où $\sqrt{\cdot}$ est la branche déterminée par $\sqrt{1} = 1$, on obtient une déformation équivalente \tilde{f}_η qui a la forme

$$\tilde{f}_\varepsilon(w) = \overline{\sqrt{a_1(\varepsilon)}}a_0(\varepsilon) + b_1(\varepsilon)\bar{w} + o(\bar{w}),$$

où maintenant $b_1(\varepsilon)$ est réel. Pour voir que H est analytique mixte, il suffit de constater que $a_1(0) \neq 0$, donc il existe une fonction $\sqrt{a_1}$ bien définie et réelle analytique pour ε petit et on la choisit par $\sqrt{a_1(0)} = 1$.

On note que $a_1(0) = 1$, donc $h_0 = id$, ce qui implique que \tilde{f}_0 est toujours sous la forme (3.2.1).

3.2.1. Forme préparée dans le cas antiholomorphe

Même si la dérivée d'une déformation f_η de f_0 de la forme (3.2.1) par rapport à $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ est non nulle, la dérivée par rapport à η_2 de $f_\eta \circ f_\eta$ peut être nulle en $(\eta, z) = (0, 0)$, mais pas celle de $\Re f_\eta$ par rapport à η_1 . Ceci motive la définition suivante.

Définition 3.2.4 (Condition de généricité). Soit f_η une déformation d'un germe antiholomorphe parabolique f_0 par deux paramètres $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, η_j réels. La déformation est générique lorsque

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} \Re f_\eta \Big|_{(\eta, z) = (0, 0)} \neq 0. \quad (3.2.2)$$

D'abord notons que $f_\eta \circ f_\eta$ est holomorphe en z et constitue une déformation à deux paramètres réels du germe parabolique holomorphe $f_0 \circ f_0$. On sait qu'une déformation dans le cas holomorphe possède au plus deux points fixes dans un voisinage suffisamment petit de l'origine $z = 0$ et pour un paramètre η assez petit. Ainsi, la déformation f_η aura soit deux points fixes simples, soit un point fixe double, soit une orbite périodique de période deux.

Pour une déformation générique, on montre qu'il existe une courbe réelle analytique dans l'espace des paramètres sur laquelle f_η a un point fixe parabolique. Ceci peut se faire de deux façons : en utilisant le théorème de préparation de Weierstrass pour les fonctions réelles analytiques ou en utilisant seulement le théorème des fonctions implicites. La première méthode semble mieux se prêter aux cas de codimension supérieure, donc c'est celle que l'on présente.

Lemme 3.2.5 (Existence des points paraboliques). Une déformation f_η de f_0 de la forme (3.2.1) possède deux points fixes, en comptant la multiplicité, ou une orbite périodique de période deux. Si, de plus, f_η est générique, alors il existe une courbe réelle analytique dans l'espace des paramètres $\eta_1 + i\eta_2$ sur laquelle f_η est parabolique.

Démonstration. Quitte à faire un changement de coordonnée tangent à l'identité en z pour $z = 0$ et de paramètre comme à la remarque 3.2.3, supposons que f_η soit de la forme

$$f_\eta(z) = a_0(\eta) + a_1(\eta)\bar{z} + o(\bar{z}),$$

où $a_1(\eta) \in \mathbb{R}$. On pose $F(x, y, \eta_1, \eta_2) = f_\eta(z) - z$, et F_1 et F_2 comme la partie réelle et la partie imaginaire de F respectivement. On a donc

$$F_1(x, y, \eta_1, \eta_2) = \Re a_0(\eta) + (a_1(\eta) - 1)x + (1 + O(\eta)) \frac{x^2 - y^2}{2} + O(\eta)O(xy) + O(|x, y|^3)$$

$$F_2(x, y, \eta_1, \eta_2) = \Im a_0(\eta) - (1 + a_1(\eta))y - (1 + O(\eta))xy + O(\eta)O(x^2 - y^2) + O(|x, y|^3)$$

En $(x, y, \eta_1, \eta_2) = 0$, on voit que $\frac{\partial}{\partial y} F_2(0) = -2$, car $a_1(0) = 1$, donc par le théorème des fonctions implicites, on a $F_2 = 0$ si et seulement si $y = m(x, \eta_1, \eta_2)$ pour une fonction m réelle analytique.

Ensuite, on pose $F'_1(x, \eta_1, \eta_2) = F_1(x, m(x, \eta_1, \eta_2), \eta_1, \eta_2)$. En $(x, \eta_1, \eta_2) = 0$, on voit que

$$\frac{\partial F'_1}{\partial x}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 F'_1}{\partial x^2}(0) = 1.$$

Ainsi, par le théorème de préparation de Weierstrass, version analytique réelle, il existe un polynôme $P_\eta(x) = x^2 + \alpha_1(\eta)x + \alpha_0(\eta)$ à coefficients réels et une fonction analytique réelle $u(x, \eta)$ à valeurs réelles tels que

$$F'_1(x, \eta_1, \eta_2) = (x^2 + \alpha_1(\eta)x + \alpha_0(\eta))u(x, \eta),$$

où $u(0, 0) \neq 0$.

Lorsque le discriminant $\Delta = \alpha_1^2 - 4\alpha_0$ est positif, P_η possède deux racines réelles simples, donc f_η possède deux points fixes. Lorsqu'il est négatif, P_η ne possède aucune racine réelle. Puisque $f_\eta \circ f_\eta$ est une déformation holomorphe, elle possède deux points fixes, donc f_η possède une orbite périodique de période deux.

Lorsque Δ est nul, P_η possède une unique racine double. Par hypothèse, on a $\frac{\partial}{\partial \eta_1} f_{\eta,1}(0) \neq 0$, donc $\frac{\partial}{\partial \eta_1} \alpha_0(0) \neq 0$. Il suit que $\frac{\partial}{\partial \eta_1} \Delta(0) \neq 0$. Par le théorème des fonctions implicites, $\Delta = 0$ si et seulement si $\eta_1 = n(\eta_2)$. Ceci décrit la courbe réelle analytique dans l'espace des paramètres sur laquelle f_η est parabolique. \square

On a vu ci-dessus que le paramètre important est le paramètre réel η_1 . Dans le cas holomorphe, il existe une forme préparée pour laquelle le paramètre est canonique. Il y a un analogue pour le cas antiholomorphe, où seule la partie réelle du paramètre est canonique. Le prochain objectif est de trouver ce paramètre réel canonique.

On commence par trouver une forme pour laquelle les points fixes ou l'orbite périodique sont placés en $\pm\sqrt{\tilde{\varepsilon}_1}$, où $\tilde{\varepsilon}_1$ sera une reparamétrisation de η_1 .

Lemme 3.2.6. *Soit f_η une déformation générique de f_0 de la forme $f_0(w) = \bar{w} + \frac{1}{2}\bar{w}^2 + o(\bar{w}^2)$. On pose $g_\eta := f_\eta \circ f_\eta$. Il existe un changement de variable et un changement de paramètre $(w, \eta) \mapsto (u, \tilde{\varepsilon})$, où $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_1 + i\tilde{\varepsilon}_2$ avec $\tilde{\varepsilon}_1$ et $\tilde{\varepsilon}_2$ réels, tel que*

$$\tilde{g}_{\tilde{\varepsilon}}(u) = u + (u^2 - \tilde{\varepsilon}_1)h_{\tilde{\varepsilon}}(u),$$

où $h_0(0) \neq 0$.

Démonstration. On remarque d'abord que $\frac{\partial^2}{\partial w^2} g_\eta(0, 0) = 2$, car f_0 est de la forme (3.2.1).

Soit γ la courbe dans l'espace des paramètres $\eta_1 + i\eta_2$ sur laquelle f_η est parabolique et soit $\eta_1 = n(\eta_2)$ son paramétrage analytique du lemme 3.2.5. On effectue le changement de paramètres $(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2) = (\eta_1 - n(\eta_2), \eta_2)$. De cette façon, $f_{\hat{\varepsilon}}$ est parabolique si et seulement si $\hat{\varepsilon}_1 = 0$.

On pose $g_{\hat{\varepsilon}} = f_{\hat{\varepsilon}} \circ f_{\hat{\varepsilon}}$. Puisque

$$\frac{\partial}{\partial w}(g_{\hat{\varepsilon}} - id)\Big|_{(w, \hat{\varepsilon})=(0,0)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial w^2}(g_{\hat{\varepsilon}} - id)\Big|_{(w, \hat{\varepsilon})=(0,0)} = 2,$$

par le théorème de préparation de Weierstrass (théorème 3.1.9), il existe un polynôme $P_{\widehat{\varepsilon}}(w) = w^2 + A(\widehat{\varepsilon})w + B(\widehat{\varepsilon})$ et une fonction holomorphe $h_{\widehat{\varepsilon}}^{\dagger}(w)$ tels que $h_0^{\dagger}(0) = 1$ et

$$g_{\widehat{\varepsilon}}(w) - w = P_{\widehat{\varepsilon}}(w)h_{\widehat{\varepsilon}}^{\dagger}(w).$$

Soit $\Delta = A^2 - 4B$ le discriminant de $P_{\widehat{\varepsilon}}$. Puisque $g_{\widehat{\varepsilon}}$ est parabolique si et seulement si $\widehat{\varepsilon}_1 = 0$, il suit qu'il existe n entier tel que

$$\Delta = \widehat{\varepsilon}_1^n q_{\Delta}(\widehat{\varepsilon}), \quad (3.2.3)$$

où $q_{\Delta}(0) \neq 0$. Par hypothèse de généricité, on a $\frac{\partial}{\partial \widehat{\varepsilon}_1} \Re f_0(0) \neq 0$, ce qui donne $\frac{\partial}{\partial \widehat{\varepsilon}_1} \Re g_0(0) \neq 0$. On obtient que $\frac{\partial}{\partial \widehat{\varepsilon}_1} \Re B(0) \neq 0$, donc $\frac{\partial}{\partial \widehat{\varepsilon}_1} \Delta$ est de rang 1, autrement dit, on doit avoir $n = 1$.

On complète le carré du polynôme

$$P_{\widehat{\varepsilon}}(w) = \left(w - \frac{A}{2}\right)^2 + B - \frac{A^2}{4} = \left(w - \frac{A}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4}.$$

On effectue le changement de coordonnée et de paramètre

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon} = \overline{q_{\Delta}}\Delta/4 + i\widehat{\varepsilon}_2, \\ u = \sqrt{\overline{q_{\Delta}}}(w - A/2), \end{cases}$$

où $\overline{q_{\Delta}}\Delta = \widehat{\varepsilon}|q_{\Delta}|^2$ est réel, et $\sqrt{\overline{q_{\Delta}}}$ est bien défini et dépend de $\widehat{\varepsilon}$ de manière réelle analytique puisque $q_{\Delta}(0) \neq 0$. Ici, $\overline{q_{\Delta}}\Delta/4$ devient notre $\tilde{\varepsilon}_1$. On a

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\widehat{\varepsilon}}(u) &= w^{-1} \circ g_{\widehat{\varepsilon}} \circ w(u) \\ &= u + \sqrt{\overline{q_{\Delta}}} \left[\left(w - \frac{A}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} \right] h_{\widehat{\varepsilon}}^{\dagger} \circ w(u) \\ &= u + \frac{\sqrt{\overline{q_{\Delta}}}}{\overline{q_{\Delta}}} \left[\overline{q_{\Delta}} \left(w - \frac{A}{2}\right)^2 - \overline{q_{\Delta}} \frac{\Delta}{4} \right] h_{\widehat{\varepsilon}}^{\dagger} \circ w(u) \\ &= u + (u^2 - \tilde{\varepsilon}_1) \frac{\sqrt{\overline{q_{\Delta}}}}{\overline{q_{\Delta}}} h_{\widehat{\varepsilon}}^{\dagger} \circ w(u), \end{aligned}$$

où $\tilde{\varepsilon}_1$ est réel. On pose $h_{\widehat{\varepsilon}}(u) = \frac{\sqrt{\overline{q_{\Delta}}}}{\overline{q_{\Delta}}} h_{\widehat{\varepsilon}}^{\dagger} \circ w(u)$. Les points fixes de $\tilde{g}_{\widehat{\varepsilon}}$ sont en $u = \pm \sqrt{\tilde{\varepsilon}_1}$. \square

On peut maintenant obtenir la forme préparée souhaitée. On commence par l'ensemble des changements de coordonnée qui préserveront la forme préparée.

Définition 3.2.7. On définit \mathcal{D} comme l'ensemble des difféomorphismes analytiques mixtes $H: (\mathbb{R}^2, 0) \times D(0, r) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0) \times \mathbb{C}; (\eta, w) \mapsto (\beta(\eta), h_{\eta}(w)) = (\varepsilon, z)$ tels que

1. $\eta_1 = \varepsilon_1$;
2. h_{η} fixe $\pm \sqrt{\eta_1}$;

$$3. h'_\eta(\pm\sqrt{\eta_1}) = \overline{h'_\eta(\pm\sqrt{\eta_1})}.$$

On l'appelle l'ensemble des changements de coordonnées admissibles.

Remarque 3.2.8. Si $\eta_1 > 0$, le point 3 signifie que les multiplicateurs de h_η sont réels.

On remarque qu'en $\eta = 0$, $\{H(0, \cdot) \mid H \in \mathcal{D}\}$ correspond à des changements de coordonnées qui préservent la dérivée en 0 d'un germe antiholomorphe parabolique.

Exemple 1. Soit v_ε^t le temps- t du champ

$$\dot{z} = \frac{z^2 - \varepsilon_1}{1 + b(\varepsilon)z},$$

où $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, ε_j réel, et où $b: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ est analytique. Soit $\beta: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ un germe de fonction analytique. Le difféomorphisme

$$H(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z) = (\varepsilon_1, \beta(\varepsilon), v_\varepsilon^t(z))$$

est un élément de \mathcal{D} s'il existe $r > 0$ indépendant de ε tel que v_ε^t est défini sur un disque $D(0, r)$ pour chaque ε . (Ceci sera possible pour $|\varepsilon|$ et r assez petits.) En effet, en analysant le champ de vecteurs, on voit que v_ε^t fixe $\pm\sqrt{\varepsilon_1}$ et que les multiplicateurs de v_ε^t valent

$$v_\varepsilon^t(\pm\sqrt{\varepsilon_1}) = \exp\left(\frac{\pm 2t\sqrt{\varepsilon_1}}{1 \pm b\sqrt{\varepsilon_1}}\right).$$

On arrive au théorème principal du chapitre.

Théorème 3.2.9 (Forme préparée). *Soit $\tilde{f}_\eta: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ une famille à un paramètre $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, $\eta_j \in \mathbb{R}$ de fonctions antiholomorphes ayant un point fixe parabolique à l'origine en $\eta = 0$ telle que $\frac{\partial}{\partial \eta_1} \Re \tilde{f}_\eta \neq 0$ en $(u, \eta) = (0, 0)$. On pose $\tilde{g}_\eta := \tilde{f}_\eta \circ \tilde{f}_\eta$ et*

$$\varepsilon_1 := \left(\frac{1}{\log(\tilde{g}'_\eta(u_0))} - \frac{1}{\log(\tilde{g}'_\varepsilon(u_1))} \right)^{-2}, \quad (3.2.4)$$

$$b := \frac{1}{\log(\tilde{g}'_\eta(u_0))} + \frac{1}{\log(\tilde{g}'_\eta(u_0))}, \quad (3.2.5)$$

où \log est la branche principale du logarithme et u_0, u_1 sont les points fixes de \tilde{g} . Alors ε_1 et b sont réels et ce sont des invariants respectivement analytique et formel du système qui dépendent du paramètre de façon réelle analytique. De plus, il existe un difféomorphisme $H: (\eta, u) \mapsto (\varepsilon_1 + i\alpha(\eta), m_\eta(u)) = (\varepsilon, z)$ analytique mixte qui transforme la famille \tilde{f}_η à la

forme préparée

$$f_\varepsilon(z) = \bar{z} + (\bar{z}^2 - \varepsilon_1)[B_0(\varepsilon) + B_1(\varepsilon)\bar{z} + (\bar{z}^2 - \varepsilon_1)Q(\varepsilon, \bar{z})], \quad (3.2.6)$$

$$\text{avec } \tau_\pm := \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \bar{z}}(\pm\sqrt{\varepsilon_1}),$$

$$\text{et } \lambda_\pm := \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial z}(\pm\sqrt{\varepsilon_1}) \quad \text{où } g_\varepsilon := f_\varepsilon \circ f_\varepsilon,$$

qui satisfait à

1. $B_0(0) = \frac{1}{2}$ et B_0 et B_1 sont à valeurs réelles ;
2. $\tau_\pm \begin{cases} \in \mathbb{R}, & \text{si } \varepsilon_1 > 0 ; \\ = \bar{\tau}_\mp, & \text{si } \varepsilon_1 < 0 ; \\ = 1, & \text{si } \varepsilon_1 = 0 ; \end{cases}$
3. $\lambda_\pm = \bar{\tau}_\pm^2$.

Le paramètre ε_1 est unique et sera appelé le paramètre canonique. Cette forme est préservée par les changements de coordonnées admissibles $H' \in \mathcal{D}$.

Lorsque f_ε est sous forme préparée, ε_1 et b s'expriment par

$$\frac{2}{\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{1}{\log(\bar{\tau}_+)} - \frac{1}{\log(\bar{\tau}_-)}, \quad 2b = \frac{1}{\log(\bar{\tau}_+)} + \frac{1}{\log(\bar{\tau}_-)}. \quad (3.2.7)$$

Remarque 3.2.10. Les équations 3.2.7 permettent de réécrire les τ_\pm comme

$$\tau_+ = \exp\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{1 + b\sqrt{\varepsilon_1}}\right), \quad \tau_- = \exp\left(\frac{-\sqrt{\varepsilon_1}}{1 - b\sqrt{\varepsilon_1}}\right). \quad (3.2.8)$$

Démonstration. Quitte à faire un changement de coordonnée et de paramètre, supposons que $\tilde{f}_\eta \circ \tilde{f}_\eta$ soit dans la forme du lemme 3.2.6. Ainsi, les points fixes (resp. l'orbite périodique) de \tilde{f}_η sont (resp. est) en $\pm\sqrt{\eta_1}$ pour $\eta_1 > 0$ (resp. $\eta_1 < 0$), où $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, $\eta_j \in \mathbb{R}$.

Pour la première partie de la preuve, on transforme \tilde{f}_η et \tilde{g}_η sous des formes un peu plus commodes avec lesquelles travailler. Ensuite, on définit le paramètre canonique et on montre qu'il est réel et qu'il dépend de manière réelle analytique de η . Par la suite, on exprime \tilde{f}_η sous sa forme préparée. Enfin, on montre que le b défini par (3.2.5) est un invariant formel du système qui dépend des paramètres de manière réelle analytique.

On applique le théorème de préparation de Weierstrass à $\sigma \circ \tilde{f}_\eta$; on a

$$\frac{\partial}{\partial u}(\sigma \circ \tilde{f}_\eta - id) \Big|_{(0,0)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2}(\sigma \circ \tilde{f}_\eta - id) \Big|_{(0,0)} = 1,$$

donc il existe un polynôme Q_η et une fonction holomorphe H_η^\dagger tel que

$$\sigma \circ \tilde{f}_\eta(u) - u = Q_\eta(u)H_\eta^\dagger(u),$$

où Q_η a la forme

$$Q_\eta(u) = u^2 + A_1u + A_0.$$

Puisque les racines de Q_η sont $\pm\sqrt{\eta_1}$, il suit que $Q_\eta(u) = u^2 - \eta_1$. On a donc la forme

$$\tilde{f}_\eta(u) = \bar{u} + (\bar{u}^2 - \eta_1)H_\eta(\bar{u})$$

On utilise le théorème de division sur H_η pour obtenir $H_\eta(u) = R(\eta, u)(u^2 - \eta_1) + C_1(\eta)u + C_0(\eta)$. Rappelons que $H_0(0) = H_0^\dagger(0) = \frac{1}{2}$, donc $C_0(0) = \frac{1}{2}$. En particulier, $C_0(\eta)$ est non nul pour $|\eta|$ petit, par continuité. Les dérivées de \tilde{f}_η en $\pm\sqrt{\eta_1}$ sont alors données par

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_+ &:= \frac{\partial \tilde{f}_\eta}{\partial \bar{u}}(\sqrt{\eta_1}) = 1 + 2\sqrt{\eta_1} \left(C_1(\eta)\sqrt{\eta_1} + C_0(\eta) \right), \\ \tilde{\tau}_- &:= \frac{\partial \tilde{f}_\eta}{\partial \bar{u}}(-\sqrt{\eta_1}) = 1 - 2\sqrt{\eta_1} \left(-C_1(\eta)\sqrt{\eta_1} + C_0(\eta) \right).\end{aligned}\tag{3.2.9}$$

Les multiplicateurs λ_\pm de \tilde{g}_η satisfont à

$$\lambda_\pm = \tilde{g}'_\eta(\pm\sqrt{\eta_1}) = \frac{\partial \tilde{f}_\eta}{\partial \bar{z}}\left(\sqrt{\eta_1}\right) \overline{\frac{\partial \tilde{f}_\eta}{\partial \bar{z}}(\sqrt{\eta_1})},$$

donc il suit que les λ_\pm sont réels si $\eta_1 \geq 0$, et $\lambda_+ = \overline{\lambda_-}$ si $\eta_1 \leq 0$. De plus, en combinant avec (3.2.9), on obtient

$$\begin{aligned}\lambda_\pm &= 1 \pm 2\sqrt{\eta_1}(C_0 + \overline{C_0}) + 2\eta_1(C_1 + \overline{C_1} + 2|C_0|^2) \\ &\quad \pm 4\sqrt{\eta_1}^3(C_0\overline{C_1} + \overline{C_0}C_1) + 4\eta_1^2|C_1|^2\end{aligned}\quad \text{pour tout } \eta_1.$$

On pose $D_0 = C_0 + \overline{C_0}$ et $D_1 = C_1 + \overline{C_1} + 2|C_0|^2$ et on réécrit λ_\pm sous la forme plus simple

$$\lambda_\pm = 1 \pm 2\sqrt{\eta_1}(D_1\sqrt{\eta_1} + D_0) + O(\sqrt{\eta_1}^3).$$

On pose

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{\log \lambda_+} - \frac{1}{\log \lambda_-} \right)^{-2},$$

qui est bien défini, puisque $\lambda_\pm = 1 + O(\sqrt{|\eta|})$, sauf peut-être en $\eta_1 = 0$. Il est réel, car les λ_\pm sont soit réels, soit conjugués complexes l'un de l'autre. Ce ε_1 est intrinsèque, puisque les multiplicateurs le sont. Ce sera le paramètre canonique, dès qu'on aura montré que ε_1 dépend de η de façon réelle analytique, y compris en $\eta_1 = 0$.

On complexifie η_1 et η_2 . Puisque les λ_\pm dépendent de η_2 de façon holomorphe, ε_1 aussi. Pour η_1 , puisque ε_1 est invariant sous la permutation $\sqrt{\eta_1} \mapsto -\sqrt{\eta_1}$, il suit que ε_1 dépend aussi de η_1 de façon holomorphe, sauf peut-être en $\eta_1 = 0$. Pour montrer qu'il est holomorphe en η_1 , on montre que ε_1 est borné pour η_1 et η_2 petits.

En utilisant le développement en série de $\log(1+x)$ autour de $x=0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\log(\lambda_+) &= 2\sqrt{\eta_1} \left(D_1(\eta)\sqrt{\eta_1} + D_0(\eta) \right) \\
&\quad - 2\eta_1 \left(D_1(\eta)\sqrt{\eta_1} + D_0(\eta) \right)^2 + O(\sqrt{\eta_1}^3) \\
&= 2\sqrt{\eta_1} \left[D_0 + \sqrt{\eta_1} (D_1 - D_0^2) + O(\eta_1) \right] \\
&= 2\sqrt{\eta_1} \left[\frac{1}{D_0} - \frac{D_1 - D_0^2}{D_0^2} \sqrt{\eta_1} + O(\eta_1) \right]^{-1}, \tag{3.2.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log(\lambda_-) &= -2\sqrt{\eta_1} \left(-D_1(\eta)\sqrt{\eta_1} + D_0(\eta) \right) \\
&\quad - 2\eta_1 \left(-D_1(\eta)\sqrt{\eta_1} + D_0(\eta) \right)^2 + O(\sqrt{\eta_1}^3) \\
&= -2\sqrt{\eta_1} \left[D_0 + \sqrt{\eta_1} (D_0^2 - D_1) + O(\eta_1) \right] \\
&= -2\sqrt{\eta_1} \left[\frac{1}{D_0} - \frac{D_0^2 - D_1}{D_0^2} \sqrt{\eta_1} + O(\eta_1) \right]^{-1}. \tag{3.2.11}
\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\log(\lambda_+)} - \frac{1}{\log(\lambda_-)} \right)^{-2} &= 4\eta_1 \left(\frac{1}{D_0(\eta)} + \frac{1}{D_0(\eta)} + O(\eta_1) \right)^{-2} \\
&= 4\eta_1 \left(\frac{D_0(\eta)}{2} + O(\eta_1) \right)^2. \tag{3.2.12}
\end{aligned}$$

Il suit que cette dernière expression tend vers 0 lorsque $\eta_1 \rightarrow 0$ et pour n'importe quel η_2 petit, car $D_0(\eta) = C_0(\eta) + \overline{C_0(\eta)} \neq 0$. Ainsi, la singularité en $\eta_1 = 0$ est apparente, donc ε_1 s'étend en une fonction holomorphe sur un voisinage de l'origine par $\varepsilon_1(0) = 0$. Lorsque l'on restreint à nouveau η_1 et η_2 aux réels, le paramètre ε_1 est réel analytique et à valeurs réelles.

On cherche maintenant une forme f_η^\dagger équivalente à \widehat{f}_η de sorte que les dérivées de f_η^\dagger en $\pm\sqrt{\eta_1}$ satisfassent aux points 2 et 3 de l'énoncé du théorème. Ceci est possible en introduisant un changement de coordonnée v_η , puisque les dérivées de \tilde{f}_η ne sont pas intrinsèques. On remarque que le point 3 découle du point 2, donc on se concentre sur ce dernier.

Soit v_η un changement de coordonnée sur $D(0, r)$ de la forme

$$v_\eta(u) = u + (u^2 - \eta_1)(A_0(\eta) + A_1(\eta)u).$$

On notera les multiplicateurs de v_η par α_\pm en $\pm\sqrt{\eta_1}$. Notons que les coefficients A_0 et A_1 sont déterminés par α_\pm par les relations

$$\begin{cases} A_0 = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{4\sqrt{\eta_1}}, \\ A_1 = \frac{\alpha_+ + \alpha_- - 2}{4\eta_1}. \end{cases}$$

On sépare le cas $\eta_1 > 0$ du cas $\eta_1 < 0$.

On commence par $\eta_1 < 0$. La dérivation en chaîne nous donne

$$\tau_{\pm} := \frac{\partial}{\partial u} v_{\eta} \circ \tilde{f}_{\eta} \circ v_{\eta}^{-1}(\pm \sqrt{\eta_1}) = \frac{\alpha_{\mp}}{\alpha_{\pm}} \tilde{\tau}_{\pm}.$$

On cherche α_{\pm} de sorte que $\tau_+ = \overline{\tau_-}$, c'est-à-dire qu'on veut

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_-}{\alpha_+} \tilde{\tau}_+ &= \overline{\frac{\alpha_+}{\alpha_-} \tilde{\tau}_-} \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha_-^2}{\alpha_+^2} &= \frac{\overline{\tilde{\tau}_-}}{\tilde{\tau}_+}. \end{aligned}$$

On prend $\alpha_{\pm} = \sqrt{\tilde{\tau}_{\pm}}$, où la racine est la branche principale, qui est bien définie puisque $\tilde{\tau}_{\pm} = 1 + O(\sqrt{|\eta|})$.

Pour le cas $\eta_1 > 0$, la dérivation en chaîne nous donne

$$\tau_{\pm} := \frac{\partial}{\partial u} v_{\eta} \circ \tilde{f}_{\eta} \circ v_{\eta}^{-1}(\pm \sqrt{\eta_1}) = \frac{\alpha_{\pm}}{\alpha_{\pm}} \tilde{\tau}_{\pm}.$$

On souhaite choisir les multiplicateurs α_{\pm} de v_{η} de sorte que τ_{\pm} soient réels. On voit que $\alpha_{\pm} = \sqrt{\tilde{\tau}_{\pm}}$, le même choix que pour $\eta_1 < 0$, fait l'affaire.

Ensuite, pour ce choix de α_{\pm} , on obtient

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\sqrt{\tilde{\tau}_+} - \sqrt{\tilde{\tau}_-}}{4\sqrt{\eta_1}} \\ A_1 &= \frac{\sqrt{\tilde{\tau}_+} + \sqrt{\tilde{\tau}_-} - 2}{4\eta_1}. \end{aligned}$$

On montre maintenant que A_0 et A_1 dépendent de η de façon réelle analytique.

D'abord, on note que les $\tilde{\tau}_{\pm}$ dépendent eux-mêmes de η_2 de façon analytique, donc A_0 et A_1 aussi. Ensuite, on complexifie η_1 . On voit que A_0 et A_1 sont holomorphes en $\sqrt{\eta_1}$. Puisque A_0 et A_1 sont invariants sous la permutation $\sqrt{\eta_1} \mapsto -\sqrt{\eta_1}$, il suit que A_0 et A_1 dépendent de η_1 de façon holomorphe, sauf peut-être en $\eta_1 = 0$, donc on vérifie qu'ils sont bornés. En utilisant le développement en série $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2)$ pour $|x|$ petit, on a

$$\sqrt{\tilde{\tau}_{\pm}} = 1 \pm \sqrt{\eta_1}(C_0 \pm \sqrt{\eta_1}C_1) + O(\eta_1),$$

où on rappelle que $\tilde{\tau}_{\pm}$ est donné par (3.2.9). On obtient

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\sqrt{\tilde{\tau}_+} - \sqrt{\tilde{\tau}_-}}{4\sqrt{\eta_1}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{\eta_1}(\overline{C}_0 + \sqrt{\eta_1}\overline{C}_1) - 1 + \sqrt{\eta_1}(\overline{C}_0 - \sqrt{\eta_1}\overline{C}_1) + O(\eta_1)}{4\sqrt{\eta_1}} \\ &= \frac{\overline{C}_0}{2} + O(\sqrt{\eta_1}), \end{aligned}$$

qui est borné. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\sqrt{\tilde{\tau}_+} + \sqrt{\tilde{\tau}_-} - 2}{4\eta_1} \\
&= \frac{1 + \sqrt{\eta_1}(\overline{C}_0 + \sqrt{\eta_1}\overline{C}_1) + 1 - \sqrt{\eta_1}(\overline{C}_0 - \sqrt{\eta_1}\overline{C}_1) - 2 + O(\eta_1)}{4\eta_1} \\
&= \frac{\overline{C}_1}{2} + O(1),
\end{aligned}$$

qui est également borné. On conclut donc que A_0 et A_1 sont holomorphes pour η_1 petit. En reprenant la partie réelle de η_1 , on obtient que A_0 et A_1 sont réels analytiques.

Soit $f_\eta^\dagger = v_\eta \circ \tilde{f}_\eta \circ v_\eta^{-1}$. En utilisant encore le théorème de préparation de Weierstrass, on obtient la forme

$$f_\eta^\dagger(v) = \bar{v} + (\bar{v}^2 - \eta_1) \left(C_0^\dagger(\eta) + C^\dagger(\eta)\bar{v} + (\bar{v}^2 - \eta_1)R^\dagger(\eta, \bar{v}) \right). \quad (3.2.13)$$

Les τ_\pm satisfont maintenant au point 2 et il en découle, par la dérivation en chaîne, que les multiplicateurs de $f_\eta^\dagger \circ f_\eta^\dagger$ et les dérivées de f_η^\dagger en $\pm\sqrt{\eta_1}$ satisfont à

$$\lambda_\pm = \overline{\tau_\pm^2},$$

ce qui montre le point 3.

Pour obtenir la forme préparée, on effectue un dernier changement de coordonnée et de paramètre $\mathcal{L}(\eta, v) = (\varepsilon_1 + i\eta_2, (1 + c(\eta))v) = (\varepsilon, L_\eta(v))$, où c est une fonction, laissée libre pour le moment, telle que c est réelle analytique en η , à *valeurs réelles* et satisfait à $c(0) = 0$. On a

$$\begin{aligned}
f_\varepsilon(z) &= L_\eta \circ f_\eta^\dagger \circ L_\eta^{-1}(z) \\
&= \bar{z} + (1 + c) \left(\frac{\bar{z}^2}{(1 + c)^2} - \eta_1 \right) \\
&\quad \cdot \left(C_0^\dagger(\varepsilon) + C_1^\dagger(\varepsilon) \frac{\bar{z}}{(1 + c)} + \left(\frac{\bar{z}^2}{(1 + c)^2} - \eta_1 \right) R(\varepsilon, \overline{L_\eta^{-1}(z)}) \right) \\
&= \bar{z} + (\bar{z}^2 - (1 + c)^2 \eta_1) \\
&\quad \cdot \left(\frac{C_0^\dagger(\varepsilon)}{(1 + c)} + C_1^\dagger(\varepsilon) \frac{\bar{z}}{(1 + c)^2} + \frac{\bar{z}^2 - (1 - c)^2 \eta_1}{(1 + c)^3} R(\varepsilon, \overline{L_\eta^{-1}(z)}) \right).
\end{aligned}$$

On souhaite donc choisir c de sorte que $(1 + c(\eta))^2 \eta_1 = \varepsilon_1$. Par l'équation (3.2.12), on voit que

$$\lim_{\eta_1 \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1(\eta)}{\eta_1} = 1,$$

donc ε_1/η_1 se prolonge en une fonction holomorphe, par la proposition 3.1.10, et $\sqrt{\varepsilon_1/\eta_1}$ est bien défini pour η_1 petit, en prenant la branche $\sqrt{1} = 1$. On prend donc

$$c(\eta) = \sqrt{\frac{\varepsilon_1(\eta)}{\eta_1}} - 1.$$

On obtient enfin la forme

$$f_\varepsilon(z) = \bar{z} + (\bar{z}^2 - \varepsilon_1)(B_0(\varepsilon) + B_1(\varepsilon)\bar{z} + (\bar{z}^2 - \varepsilon_1)Q(\varepsilon, \bar{z})),$$

où

$$B_0 = \frac{C_0^\dagger}{1+c}, \quad B_1 = \frac{C_1^\dagger}{(1+c)^2}, \quad Q(\varepsilon, \bar{z}) = \frac{R(\varepsilon, \overline{L_\eta^{-1}(z)})}{(1+c)^3}.$$

Remarquons que

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \bar{z}}(\pm\sqrt{\varepsilon_1}) = \frac{\partial f_\eta^\dagger}{\partial \bar{w}}(\pm\sqrt{\eta_1}) = \tau_\pm,$$

où f_η^\dagger est en (3.2.13), puisque le changement de coordonnée est linéaire et le coefficient de la partie linéaire est réel.

On montre que B_0 et B_1 sont à valeurs réelles. Comme on a, pour $\varepsilon_1 \neq 0$,

$$B_0(\varepsilon) = \frac{\tau_+ - \tau_-}{4\sqrt{\varepsilon_1}} \quad \text{et} \quad B_1(\varepsilon) = \frac{\tau_+ + \tau_- - 2}{4\varepsilon_1},$$

ceci découle du point 2.

Pour voir qu'un difféomorphisme $\mathcal{H} \in \mathcal{D}$ préserve cette forme, on observe que les points fixes ou l'orbite périodique sont préservés, que ε_1 est préservé et que les τ_\pm sont préservés. Puisque B_0 et B_1 sont déterminés par les τ_\pm , la forme préparée est préservée, avec peut-être un reste différent.

Il reste à montrer que b défini par l'équation (3.2.5) est un invariant formel et qu'il dépend de ε_1 et de ε_2 de façon réelle analytique. On peut réécrire l'équation (3.2.5) comme

$$b(\varepsilon) = \frac{1}{\log(\lambda_+)} + \frac{1}{\log(\lambda_-)},$$

d'où l'on voit que c'est un invariant. De plus, il est à valeurs réels, car soit les λ_\pm sont réels positifs, auquel cas les $\log(\lambda_\pm)$ sont réels, soit $\lambda_+ = \overline{\lambda_-}$, auquel cas $\log \lambda_- = \overline{\log \lambda_+}$.

On montre que b est analytique en η , et puisque le changement de paramètre $\eta \mapsto \varepsilon$ est analytique, on aura la conclusion voulue. On complexifie η_1 et η_2 . On sait déjà que b est holomorphe en η_2 . Par le théorème des fonctions symétriques, on obtient aussi que b est holomorphe en η_1 , sauf peut-être en $\eta_1 = 0$.

En réutilisant les équations (3.2.10) et (3.2.11), on a

$$\begin{aligned}
b(\eta_1, \eta_2) &= \frac{1}{\log \lambda_+} + \frac{1}{\log \lambda_-} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\eta_1}} \left[\frac{1}{D_0} - \frac{D_1 - D_0^2}{D_0^2} \sqrt{\eta_1} + O(\eta_1) \right] \\
&\quad + \frac{-1}{2\sqrt{\eta_1}} \left[\frac{1}{D_0} - \frac{D_0^2 - D_1}{D_0^2} \sqrt{\eta_1} + O(\eta_1) \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\eta_1}} \left(\frac{2D_0^2 - 2D_1}{D_0^2} \sqrt{\eta_1} + O(\eta_1) \right) \\
&= \frac{D_0^2 - D_1}{D_0^2} + O(\sqrt{\eta_1}).
\end{aligned}$$

En laissant $\eta_1 \rightarrow 0$, on voit que b est borné, donc qu'il s'étend en une fonction holomorphe de η_1 en 0. On voit aussi que $b(0) = 1 - D_1(0)$. \square

3.2.2. Diagramme de bifurcation

Soit f_ε une déformation à un paramètre réel d'un germe antiholomorphe parabolique f_0 . Supposons que f_ε est sous forme préparée. Soit τ_\pm les dérivées de f_ε en $\pm\sqrt{\varepsilon}$.

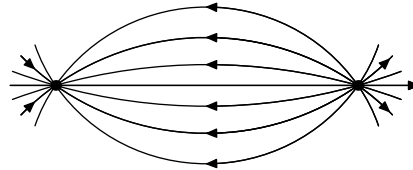
Pour $\varepsilon > 0$, les dérivées sont

$$\tau_\pm = \exp \left(\frac{\pm\sqrt{\varepsilon}}{1 \pm b\sqrt{\varepsilon}} \right).$$

Comme $\varepsilon > 0$ et b est réel, il suit que les τ_\pm sont des nombres réels positifs. Pour b fixé et des petites valeurs de ε , on a que

$$\tau_+ > 1 \quad \text{et} \quad \tau_- < 1.$$

En effet, en prenant le logarithme de τ_\pm et en remarquant que $1 \pm b\sqrt{\varepsilon}$ est positif pour ε petit, on voit que $\log \tau_\pm$ est positif pour τ_+ et négatif pour τ_- . Le portrait de phase du champ de vecteurs (4.1.1) est le suivant



Pour la déformation f_ε , les orbites envoient à peu près les lignes sur les lignes, en alternant entre le dessus et le dessous de l'axe réel à chaque pas de temps, à cause de la conjugaison complexe.

Pour $\varepsilon < 0$, les multiplicateurs sont

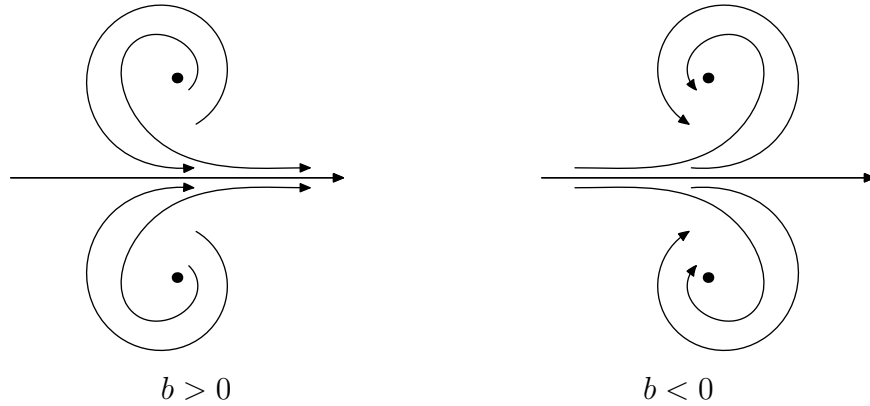
$$\tau_{\pm} = \exp \left(\frac{\mp \sqrt{\varepsilon}}{1 \mp b\sqrt{\varepsilon}} \right).$$

(Les signes sont inversés à cause de la conjugaison complexe). Pour calculer la norme, on fait

$$\begin{aligned} \exp \left(\frac{\mp \sqrt{\varepsilon}}{1 \mp b\sqrt{\varepsilon}} \right) &= \exp \left(\frac{\mp \sqrt{\varepsilon}}{1 \mp b\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{1 \pm b\sqrt{\varepsilon}}{1 \pm b\sqrt{\varepsilon}} \right) \\ &= \exp \left(\frac{\mp \sqrt{\varepsilon} - b\varepsilon}{1 - b^2\varepsilon} \right), \end{aligned}$$

donc on obtient que $|\tau_{\pm}| = \exp \left(\frac{-b\varepsilon}{1-b^2\varepsilon} \right)$. Remarquons que $|\tau_+|$ et $|\tau_-|$ sont égaux.

Ensuite, encore en prenant le logarithme et en utilisant le fait que $1 - b^2\varepsilon$ est positif pour ε négatif, on conclut que $\log |\tau_{\pm}|$ est positif pour b positif et négatif pour b négatif. Le portrait de phase du champ de vecteurs (4.1.1) est le suivant



Les orbites de la déformation f_{ε} envoient à peu près les lignes sur les lignes, mais en alternant entre le haut et le bas à chaque pas de temps, à cause de la conjugaison complexe.

Lorsque b est nul, au niveau du champ de vecteurs, on obtient des centres. Pour des difféomorphismes généraux, il y a des dynamiques plus beaucoup compliquées.

On présente à la figure 20 le diagramme de bifurcation pour ε réel et petit d'une déformation f_{ε} d'un germe antiholomorphe parabolique f_0 , pour laquelle $b(0) \neq 0$. Les lignes représentent les lignes de flot du champ (4.1.1) et les points, une orbite de f_{ε} et f_{ε} envoie à peu près les lignes sur lignes, en alternant entre $\Im z \geq 0$ et $\Im z \leq 0$ pour chaque pas de temps.

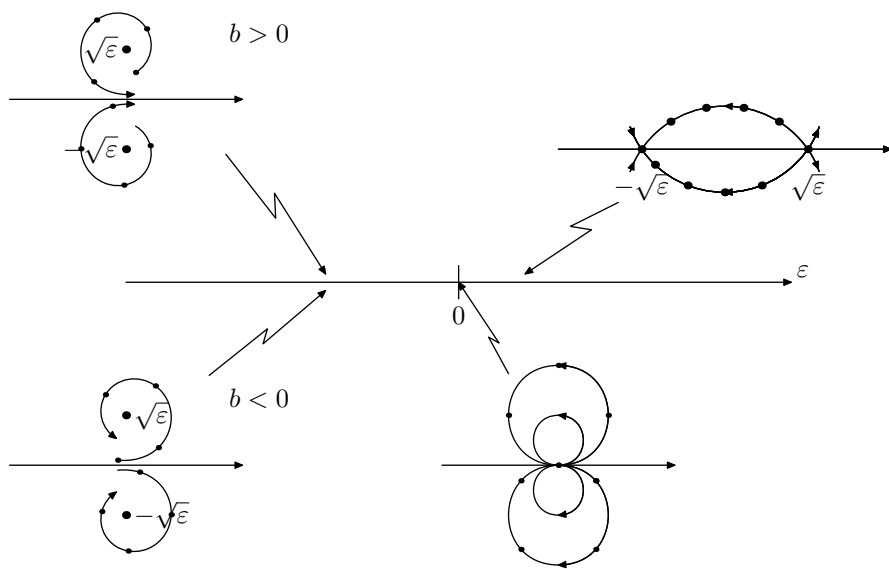


Figure 20. Le diagramme de bifurcation si $b(0) \neq 0$.

Chapitre 4

Module de classification et équivalence faible

Soit f_ε une déformation générique (voir la définition 3.2.4) à un paramètre réel de f_0 , un germe antiholomorphe parabolique. On suppose que ε est le paramètre réel canonique de la déformation et que f_ε est sous forme préparée (voir le théorème 3.2.9).

On travaillera habituellement implicitement avec un représentant du germe f_ε défini sur $(\varepsilon, z) \in D(0, r') \times D(0, r)$, où $r, r' > 0$ peuvent être aussi petits que l'on veut.

À l'aide du paramètre canonique et de la forme préparée, on a facilement pu décrire la dynamique au niveau topologique et formel de f_ε dans le diagramme de bifurcation lorsque l'invariant formel est non nul à la section 3.2.2. Pour obtenir une classification plus fine, on fera ressortir une structure géométrique de la dynamique de f_ε qui sera préservée par les changements de coordonnée.

La situation est analogue au cas sans paramètre : on montre qu'il existe des changements de coordonnée presque unique définis sur des secteurs, et qui conjuguent f_ε à la forme normale. Sur l'intersection des secteurs, on peut définir des fonctions de transition en composant un changement de coordonnée sur un secteur avec l'inverse d'un changement de coordonnée sur l'autre secteur. On identifie ensemble les différentes possibilités de fonctions de transition et cette classe d'équivalence est un invariant de la déformation f_ε . Comme on le verra au chapitre 5, c'est le dernier ingrédient dont on a besoin pour obtenir l'équivalence forte.

4.1. Coordonnées de Fatou

Soit f_0 un germe antiholomorphe parabolique. Puisque la forme préparée d'une déformation générique de f_0 n'a qu'un seul paramètre réel canonique, on considère pour la suite les déformations à un paramètre réel.

Soit f_ε une déformation générique de f_0 dans sa forme préparée (voir théorème 3.2.9), où ε est réel, et soit $g_\varepsilon := f_\varepsilon \circ f_\varepsilon$. Un modèle pour g_ε est le temps-1 du champ

$$\dot{z} = v_\varepsilon(z) := \frac{z^2 - \varepsilon}{1 + b(\varepsilon)z}. \quad (4.1.1)$$

Le modèle pour f_ε sera le temps- $\frac{1}{2}$ composé avec la conjugaison complexe. On notera ces germes par v_ε^1 et $\sigma \circ v_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ respectivement. Ils satisfont aux relations

$$\sigma \circ v_\varepsilon^{\frac{1}{2}} = v_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \circ \sigma \quad \text{et} \quad \sigma \circ v_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \circ \sigma \circ v_\varepsilon^{\frac{1}{2}} = v_\varepsilon^1$$

puisque $b(\varepsilon)$ est réel.

4.1.1. Coordonnée temps

Comme dans le cas $\varepsilon = 0$, on choisit de travailler dans la coordonnée temps du champ (4.1.1)

$$Z_\varepsilon = q_\varepsilon(z) := \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \log\left(\frac{z - \sqrt{\varepsilon}}{z + \sqrt{\varepsilon}}\right) + \frac{b}{2} \log(z^2 - \varepsilon), & \text{si } \varepsilon \neq 0; \\ -\frac{1}{z} + b \log z, & \text{si } \varepsilon = 0. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Cette application est multivoque. Notons sa surface de Riemann \mathcal{Z} . Notons également que $Z_\varepsilon \rightarrow Z_0$ uniformément lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ sur les anneaux

$$A_\delta = \{r - \delta < |z| < r\}$$

pour tout $\delta > 0$. Ainsi, pour ε petit, Z_ε et Z_0 sont proches dans la norme infinie près de la frontière du disque $D(0, r)$.

4.1.1.1. Surface de Riemann de la coordonnée temps. Près du bord du disque $D(0, r)$, la dynamique est presque identique à celle du cas $\varepsilon = 0$. Ainsi, lorsque l'on regarde près de la frontière, la coordonnée temps ressemble à celle du cas $\varepsilon = 0$ près du trou (voir figure 21). Lorsque l'on fait un tour en longeant la frontière, on tourne autour des deux pôles de $\frac{1+bz}{z^2-\varepsilon}$ et dans la coordonnée temps, ceci revient à tourner autour du trou et changer de feuille, comme dans le cas $\varepsilon = 0$.

Pour obtenir le reste de la surface correspondant à l'intérieur de $D(0, r)$, on voit qu'il faudra permettre de tourner autour de chacun des points fixes du champ (4.1.1). Ainsi, le trou de la figure 21 se répétera à chaque tour autour de $\pm\sqrt{\varepsilon}$. La *période* pour faire un tour dans le sens positif autour de $\pm\sqrt{\varepsilon}$ correspond à

$$\alpha_\pm := \int_{\partial D(\pm\sqrt{\varepsilon}, \delta)} \frac{1+bz}{z^2-\varepsilon} dz = \pm \frac{i\pi}{\sqrt{\varepsilon}} + i\pi b. \quad (4.1.3)$$

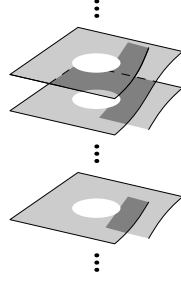


Figure 21. Surface de Riemann de la coordonnée temps près de la frontière du disque $D(0, r)$.

Il s'ensuit que les translations $T_{\alpha_{\pm}}$ sont des automorphismes de la surface, donc une petite région autour d'un trou est envoyée autour du prochain trou par $T_{\alpha_{\pm}}$.

Notons les observations suivantes. D'abord, la taille du trou dans la coordonnée Z correspond à peu près à un disque de rayon $\frac{1}{r}$ (puisque pour ε assez petit, $Z_{\varepsilon} \approx -\frac{1}{z} + b \log z$ près de la frontière de $D(0, r)$ et pour r assez petit, $-\frac{1}{z} + b \log z \approx -\frac{1}{z}$). Puisque $|\varepsilon| \ll r$, on a $\frac{1}{|\sqrt{\varepsilon}|} \gg \frac{1}{r}$. Autrement dit, la distance entre les trous est beaucoup plus grande que la taille de ceux-ci.

Ensuite, pour $\varepsilon > 0$, les périodes α_{\pm} sont imaginaires pures, donc les trous sur une feuille sont alignés verticalement. Pour $\varepsilon < 0$, la pente de α_{\pm} est presque nulle, car $\frac{1}{|\sqrt{\varepsilon}|}$ est beaucoup plus grand que b , donc sur une feuille, les trous sont presque alignés horizontalement. Voir la figure 22.



Figure 22. À droite, une feuille de la coordonnée temps pour $\varepsilon < 0$; à gauche, pour $\varepsilon > 0$; les pointillés sont les lieux où l'on change de feuille.

4.1.1.2. Branches principales de la coordonnées temps. On décrit deux branches que l'on nommera *principales*, dans le lemme suivant. On rappelle que $(-r', r') \times D(0, r)$ est le domaine d'un représentant du germe f_{ε} .

Lemme 4.1.1 (Branches principales de la coordonnée temps). *Soit $b : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ un germe de fonction analytique en ε . Quitte à restreindre r et ε , on suppose que $1/|b(\varepsilon)| > r$ lorsque*

$b(\varepsilon) \neq 0$. On définit les branches principales de la coordonnée temps par

$$Z_\varepsilon^-(z) = \int_{-\frac{1}{|b|}}^z \frac{1+b\zeta}{\zeta^2 - \varepsilon} d\zeta, \quad \text{où le chemin d'intégration se trouve dans } \mathbb{C} \setminus ([-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}] \cup \mathbb{R}^+);$$

$$Z_\varepsilon^+(z) = \int_{\frac{1}{|b|}}^z \frac{1+b\zeta}{\zeta^2 - \varepsilon} d\zeta + C(\varepsilon), \quad \text{où le chemin d'intégration se trouve dans } \mathbb{C} \setminus ([-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}] \cup \mathbb{R}^-);$$

où $C(\varepsilon)$ est la valeur principale à l'infini

$$C(\varepsilon) = \lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ M \in \mathbb{R}}} \left(\int_{-\frac{1}{|b|}}^{-M} + \int_M^{\frac{1}{|b|}} \right) \frac{1+b\zeta}{\zeta^2 - \varepsilon} d\zeta.$$

Définies ainsi, les Z_ε^\pm satisfont à

1. $Z_\varepsilon^\pm(\bar{z}) = \overline{Z_\varepsilon^\pm(z)}$;
2. pour $z \in \mathbb{C} \setminus ([-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}] \cup \mathbb{R})$, on a

$$Z_\varepsilon^+(z) - Z_\varepsilon^-(z) = \begin{cases} i\pi b, & \text{si } \Im z > 0; \\ -i\pi b, & \text{si } \Im z < 0; \end{cases} \quad (4.1.5)$$

3. C est à valeurs réelles et dépend analytiquement de ε .

En une valeur ε_0 où $b(\varepsilon_0) = 0$, on définit les branches principales par

$$Z_\varepsilon^\pm(z) = \lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ M \in \mathbb{R}}} \int_{\pm M}^z \frac{1}{\zeta^2 - \varepsilon} d\zeta$$

qui convergent. Ainsi définies, les Z_ε^\pm sont continues en ε , car $C(\varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$.

Démonstration. D'abord, notons que les Z_ε^\pm sont bien définies, pourvu que C soit bien définie, puisque leur domaine est simplement connexe. Un calcul direct montre C est bien définie et dépend analytiquement de ε . On a

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\frac{1}{|b|}}^{-M} + \int_M^{\frac{1}{|b|}} \right) \frac{1+b\zeta}{\zeta^2 - \varepsilon} d\zeta &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \log \left(\frac{-M - \sqrt{\varepsilon}}{-M + \sqrt{\varepsilon}} \right) + \frac{b}{2} \log((-M)^2 - \varepsilon) \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \log \left(\frac{M - \sqrt{\varepsilon}}{M + \sqrt{\varepsilon}} \right) - \frac{b}{2} \log(M^2 - \varepsilon) + D \end{aligned}$$

(où D est un reste qui ne dépend pas de M)

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \log \left(\frac{M + \sqrt{\varepsilon}}{M - \sqrt{\varepsilon}} \right) + i\pi b + D$$

$$\longrightarrow D + i\pi b, \quad \text{lorsque } M \rightarrow \infty.$$

Le terme $i\pi b$ provient de la différence

$$\frac{b}{2} \left(\log((-M)^2 - \varepsilon) - \log(M^2 - \varepsilon) \right),$$

puisque les angles formés entre M et $\pm\sqrt{\varepsilon}$ et entre $-M$ et $\pm\sqrt{\varepsilon}$ tendent respectivement vers $2i\pi n$ et $2i\pi n + i\pi$ lorsque $M \rightarrow +\infty$, où $n \in \mathbb{Z}$ dépend de la branche du logarithme utilisée (on peut prendre $n = 0$ sans problème).

Puisque l'intégrande est réel sur le domaine d'intégration, il suit que C est réel. De plus, D est donnée par

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \log \left(\frac{\frac{1}{|b|} - \sqrt{\varepsilon}}{\frac{1}{|b|} + \sqrt{\varepsilon}} \right) + \frac{b}{2} \log \left(\frac{1}{|b|^2} - \varepsilon \right) \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \log \left(\frac{-\frac{1}{|b|} - \sqrt{\varepsilon}}{-\frac{1}{|b|} + \sqrt{\varepsilon}} \right) - \frac{b}{2} \log \left(\left(-\frac{1}{|b|} \right)^2 - \varepsilon \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \log \left(\frac{\frac{1}{|b|} - \sqrt{\varepsilon}}{\frac{1}{|b|} + \sqrt{\varepsilon}} \right) - i\pi b. \end{aligned}$$

On voit que D dépend analytiquement de ε , puisque D est invariant sous la permutation $\sqrt{\varepsilon} \mapsto -\sqrt{\varepsilon}$ et que D est bornée lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. De plus, si $b \rightarrow 0$, on voit que $D \rightarrow 0$ et donc $C \rightarrow 0$. Ceci montre le point 3.

Pour le point 1, il suffit de constater que l'intégrande des Z_ε^\pm commute avec la conjugaison complexe, puisque b et ε sont réels, et les points de départ des chemins d'intégration des Z_ε^\pm sont réels.

Enfin, on montre le point 2 dans le cas $b \neq 0$. Le cas $b = 0$ peut se faire de la même façon, mais en remplaçant $\pm\frac{1}{|b|}$ par $\pm r$. On montre d'abord que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\gamma_M} \frac{1+b\zeta}{\zeta^2 - \varepsilon} d\zeta = i\pi b,$$

où γ_M est le chemin de la figure 23.

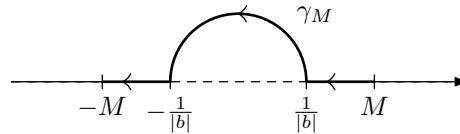


Figure 23. Contour d'intégration.

Soit α le demi-cercle $\{z : \Im z \geq 0, |z| = \frac{1}{|b|}\}$ orienté dans le sens positif. On a

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\gamma_M} \frac{1+b\zeta}{\zeta^2 - \varepsilon} d\zeta &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{1}{|b|}}^{-M} + \int_{\alpha} + \int_M^{\frac{1}{|b|}} \right) \frac{1+b\zeta}{\zeta^2 - \varepsilon} d\zeta \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{1}{|b|}}^{-M} + \int_M^{\frac{1}{|b|}} \right) \frac{1+b\zeta}{\zeta^2 - \varepsilon} d\zeta + \int_{\alpha} \frac{1+b\zeta}{\zeta^2 - \varepsilon} d\zeta \end{aligned}$$

$$= C - D = i\pi b.$$

Lorsque z se trouve dans les domaines des Z_ε^\pm avec $\Im z > 0$, la différence $Z_\varepsilon^+(z) - Z_\varepsilon^-(z)$ s'écrit comme la valeur principale

$$Z_\varepsilon^+(z) - Z_\varepsilon^-(z) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{z,M}^+} \frac{1 + b\zeta}{\zeta^2 - \varepsilon} d\zeta,$$

où $\gamma_{z,M}^+$ est le chemin de la figure 24 (à gauche). Comme ce parcours est homotope à γ_M pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus ([-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}] \cup \mathbb{R})$ avec $\Im z > 0$, il suit que $Z_\varepsilon^+(z) - Z_\varepsilon^-(z)$ ne dépend pas de z et vaut $i\pi b$. Le cas où $\Im z < 0$ est tout à fait analogue, puisque la différence revient à intégrer le parcours $\gamma_{z,M}^-$ sur la figure 24 (à droite), et à utiliser le fait que l'intégrale sur $\{|z| = r\}$ dans le sens positif vaut $2i\pi b$. On obtient la conclusion du point 2.



Figure 24. Contours d'intégration.

□

La coordonnée temps est appelée ainsi, car elle correspond réellement à l'espace temps du champ de vecteurs 4.1.1. Le long d'une droite horizontale, le temps « progresse », donc si $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est un paramétrage d'une droite horizontale, alors $Z_\varepsilon^{-1} \circ \gamma$ paramétrise une trajectoire du flot du champs de vecteurs, voir la figure 25. Puisque la forme normale holomorphe est le temps-un du champ, l'ensemble des points $\{Z + n\}_n$ est envoyé sur une orbite de v^1 . En fait, lorsqu'on conjugue v^1 par Z_ε , on obtient T_1 .

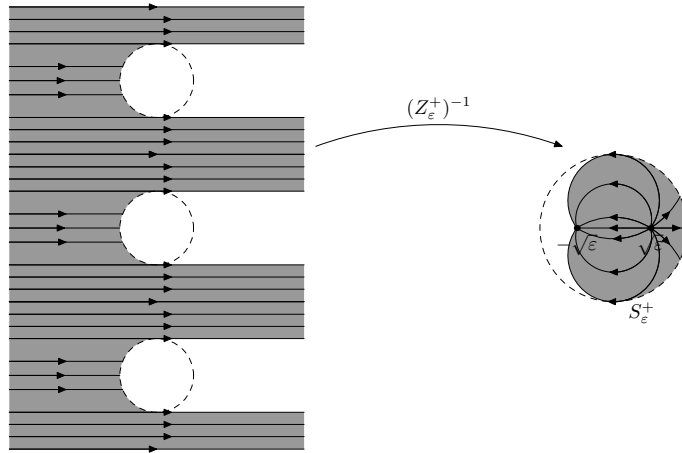


Figure 25. Les droites horizontales dans une carte de la coordonnée temps envoyées sur les lignes de flot du champ (4.1.1) pour $\varepsilon > 0$.

4.1.1.3. Relèvement sur la coordonnée temps. On aura besoin d'une conjugaison complexe sur la coordonnée temps. On a choisi les fonctions Z_ε^\pm de sorte que

$$Z_\varepsilon^\pm(\bar{z}) = \overline{Z_\varepsilon^\pm(z)},$$

donc la conjugaison complexe σ se définit naturellement sur l'image de Z_ε^\pm . On la note Σ . On prolonge sur le reste de la surface en utilisant la relation

$$\Sigma \circ T_{\alpha_\pm} = T_{\overline{\alpha_\pm}} \circ \Sigma,$$

où α_\pm est la période (4.1.3).

De façon similaire, on définit les relèvements de f_ε et de g_ε , que l'on note F_ε et G_ε respectivement, d'abord avec la branche principale par

$$F_\varepsilon = (Z_\varepsilon^\pm)^{-1} \circ f_\varepsilon \circ Z_\varepsilon^\pm \quad \text{et} \quad G_\varepsilon = (Z_\varepsilon^\pm)^{-1} \circ g_\varepsilon \circ Z_\varepsilon^\pm$$

et ensuite on prolonge analytiquement sur le reste de la surface par les relations

$$F_\varepsilon \circ T_{\alpha_\pm} = T_{\overline{\alpha_\pm}} \circ F_\varepsilon \quad \text{et} \quad G_\varepsilon \circ T_{\alpha_\pm} = T_{\overline{\alpha_\pm}} \circ G_\varepsilon.$$

Bien sûr, ces relèvements satisfont à $F_\varepsilon \circ F_\varepsilon = G_\varepsilon$. On aurait pu définir G_ε de cette façon, mais on considérera parfois des g_ε qui ne sont pas de la forme $f_\varepsilon \circ f_\varepsilon$.

Lorsque f_ε et g_ε sont sous forme préparée, ils sont proches de leur forme normale, au sens où $f_\varepsilon(z) - \sigma \circ v^{\frac{1}{2}}(z) = o(\bar{z}^2 - \varepsilon)$ et $g_\varepsilon(z) - v^1(z) = o(z^2 - \varepsilon)$. On veut donc montrer que f_ε est proche de $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$ et que g_ε est proche de T_1 dans la coordonnée temps. Les estimés que l'on montrera seront utilisés à la section 4.1.3.

Le résultat suivant est analogue à un résultat de [14]. La démonstration est similaire.

Lemme 4.1.2. *On suppose que f_ε est générique et que f_ε est dans une coordonnée telle que*

$$f_\varepsilon(z) = \bar{z} + (\bar{z}^2 - \varepsilon)R(\varepsilon, \bar{z}),$$

où $R(\varepsilon, z) = \frac{1}{2} + O(|z| + |\varepsilon|)$ (par exemple, si f_ε est sous forme préparée). Soit F_ε le relèvement de f_ε sur la coordonnée temps. Alors F_ε est anti-analytique mixte en (ε, Z) et on a les estimations suivantes :

1. $|F_\varepsilon(Z) - \bar{Z} - \frac{1}{2}| \leq C_1 = C_F \max\{r, r'\};$
2. $|F'_\varepsilon(Z) - 1| \leq C_2 = C'_F \max\{r^2, r'\};$

où C_j , $j = 1, 2$, sont des constantes qui dépendent seulement de r' et de r , mais pas de ε ou de z , et C_F et C'_F sont des constantes.

De plus, si $G_\varepsilon = F_\varepsilon \circ F_\varepsilon$, alors on a

3. $|G_\varepsilon(Z) - Z - 1| \leq 2C_1;$
4. $|G'_\varepsilon(Z) - 1| \leq 2C_2 + C_2^2.$

Démonstration. On complexifie ε . On a

$$\begin{aligned}
F_\varepsilon(Z) &= Z_\varepsilon \circ f_\varepsilon \circ Z_\varepsilon^{-1}(Z) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \log \left(\frac{f_\varepsilon(z) - \sqrt{\varepsilon}}{f_\varepsilon(z) + \sqrt{\varepsilon}} \right) + \frac{b}{2} \log \left(f_\varepsilon(z)^2 - \varepsilon \right) \\
&= \bar{Z} + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \log \left(\frac{1 + (\bar{z} + \sqrt{\varepsilon})R(\varepsilon, \bar{z})}{1 + (\bar{z} - \sqrt{\varepsilon})R(\varepsilon, \bar{z})} \right) \\
&\quad + \frac{b}{2} \log \left(1 + 2\bar{z}R(\varepsilon, \bar{z}) + (\bar{z}^2 - \varepsilon)R(\varepsilon, \bar{z})^2 \right).
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Le deuxième logarithme dans (4.1.6) est holomorphe en ε et tend vers 0 lorsque $(\varepsilon, z) \rightarrow (0, 0)$. Le premier logarithme est holomorphe en $\sqrt{\varepsilon}$ et on voit que F_ε est invariant sous la permutation $\sqrt{\varepsilon} \mapsto -\sqrt{\varepsilon}$. On montre qu'il est borné lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et qu'il tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque $(\varepsilon, z) \rightarrow (0, 0)$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \log \left(\frac{1 + (\bar{z} + \sqrt{\varepsilon})R(\varepsilon, \bar{z})}{1 + (\bar{z} - \sqrt{\varepsilon})R(\varepsilon, \bar{z})} \right) &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \log \left(1 + \frac{2\sqrt{\varepsilon}R(\varepsilon, \bar{z})}{1 + (\bar{z} - \sqrt{\varepsilon})R(\varepsilon, \bar{z})} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon}R(\varepsilon, \bar{z})}{1 + (\bar{z} - \sqrt{\varepsilon})R(\varepsilon, \bar{z})} + O(\varepsilon) \right) \\
&\longrightarrow \frac{R(0, \bar{z})}{1 + \bar{z}R(0, \bar{z})} < \infty \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Il suit que F_ε est holomorphe en ε . Ensuite, si $z \rightarrow 0$ dans (4.1.7), on obtient $\frac{1}{2}$, car $R(0, 0) = \frac{1}{2}$. On conclut que $|F_\varepsilon(Z) - \bar{Z} - \frac{1}{2}| = O(|z| + |\varepsilon|)$ (on a $|\varepsilon|$ plutôt que $\sqrt{|\varepsilon|}$, car F_ε est holomorphe en ε).

Pour montrer le point 2, on pose

$$S = \frac{R(\varepsilon, \bar{z})}{1 + (\bar{z} - \sqrt{\varepsilon})R(\varepsilon, \bar{z})} \quad \text{et} \quad Q = 1 + 2\bar{z}R + (\bar{z}^2 - \varepsilon)R(\varepsilon, \bar{z})^2.$$

On remplace dans l'équation (4.1.6) et on dérive

$$\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial \bar{Z}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1 + 2\sqrt{\varepsilon}S} \frac{\partial S}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{Z}} + \frac{b}{2} \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{Z}}.$$

Les termes $\frac{1}{1+2\sqrt{\varepsilon}S}$, $\frac{\partial S}{\partial \bar{z}}$, $\frac{1}{Q}$ et $\frac{\partial Q}{\partial \bar{z}}$ sont bornés et $\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{Z}} = \frac{z^2 - \varepsilon}{1+bz} = O(|z|^2 + |\varepsilon|)$. Ainsi, on a

$$|F'_\varepsilon(Z) - 1| = O(|z|^2 + |\varepsilon|),$$

d'où la borne en découle.

Pour la deuxième partie, on a

$$\begin{aligned}
|G_\varepsilon(Z) - Z - 1| &= |F_\varepsilon(F_\varepsilon(Z)) - F_\varepsilon(Z) - \frac{1}{2} + F_\varepsilon(Z) - \frac{1}{2}| \\
&\leq |F_\varepsilon(F_\varepsilon(Z)) - F_\varepsilon(Z) - \frac{1}{2}| + |F_\varepsilon(Z) - \frac{1}{2}| \\
&\leq C_1 + C_1 = 2C_1
\end{aligned}$$

et, en utilisant le fait que $G'_\varepsilon(Z) = F'_\varepsilon(F_\varepsilon(Z))\overline{F'_\varepsilon(Z)}$, où $F'_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial \bar{Z}}F_\varepsilon$, on a

$$\begin{aligned} |G'_\varepsilon(Z) - 1| &= |F'_\varepsilon(F_\varepsilon(Z))\overline{F'_\varepsilon(Z)} - \overline{F'_\varepsilon(Z)} + \overline{F'_\varepsilon(Z)} - 1| \\ &\leq |F'_\varepsilon(F_\varepsilon(Z))\overline{F'_\varepsilon(Z)} - \overline{F'_\varepsilon(Z)}| + |\overline{F'_\varepsilon(Z)} - 1| \\ &\leq |F'_\varepsilon(Z)| |F'_\varepsilon(F_\varepsilon(Z)) - 1| + C_2 \\ &\leq (C_2 + 1)C_2 + C_2 = C_2^2 + 2C_2. \end{aligned}$$

□

4.1.1.4. Domaines de translation. On ne travaillera jamais sur toute la surface de Riemann de la coordonnée temps, on choisira plutôt des cartes définies à partir de la dynamique de g_ε . On verra que ce sont des domaines naturels pour définir les coordonnées de Fatou.

On rappelle que la surface de Riemann de la coordonnée temps Z_ε^\pm a des trous comme sur la figure 21 et que ceux-ci se répètent avec la période α_\pm . On nomme le trou borné par le domaine de la branche principale le *trou fondamental*. Pour $\varepsilon > 0$, voir la figure 26, où le trou fondamental se trouve dans la région gris foncé ; pour $\varepsilon < 0$, voir la figure 27, où le trou fondamental se trouve à droite de la bande grise.

Pour définir les domaines, on suppose que r et r' sont assez petits pour que la constante C_1 du lemme 4.1.2 soit plus petite que $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire qu'on demande que $|G_\varepsilon - T_1| \leq 2C_1 < 1$.

On se prépare maintenant à décrire les U_ε^\pm pour $\varepsilon \neq 0$. Le cas $\varepsilon = 0$ a déjà été décrit dans le chapitre 2. Soit x_+ un point réel positif tel que $|\sqrt{\varepsilon}| < x_+ < r$ pour tout ε et soit $x_- = -x_+$.

On considère une droite verticale ℓ^\pm passant par $Z_\varepsilon^\pm(x_\pm)$. Ensuite, on considère la bande B_ε^\pm comprise entre ℓ^\pm et $G_\varepsilon(\ell^\pm)$, incluant sa frontière. Puisque $|G_\varepsilon - T_1| \leq 2C_1$ et que ℓ^\pm est verticale, il s'ensuit que ℓ^\pm et $G_\varepsilon(\ell^\pm)$ sont disjoints. On obtient U_ε^\pm à partir de B_ε^\pm en suivant la dynamique (voir la figure 26), c'est-à-dire qu'on pose

$$U_\varepsilon^\pm = \{Z \in \mathcal{Z} \mid \exists Z_0 \in B_\varepsilon^\pm, n \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } G^{on}(Z_0) = Z\}. \quad (4.1.8)$$

On définit les « secteurs » dans la coordonnée z par

$$S_\varepsilon^\pm = Z_\varepsilon^{-1}(U_\varepsilon^\pm).$$

Certaines parties de S_ε^\pm sont recouvertes plusieurs fois par Z_ε^{-1} , comme l'illustrent les figures 26 et 27.

Définition 4.1.3. *Un domaine de translation engendré par une droite parallèle (resp. transverse) à la ligne des trous est appelé un domaine de translation de Glutsyuk (resp. Lavaurs).*

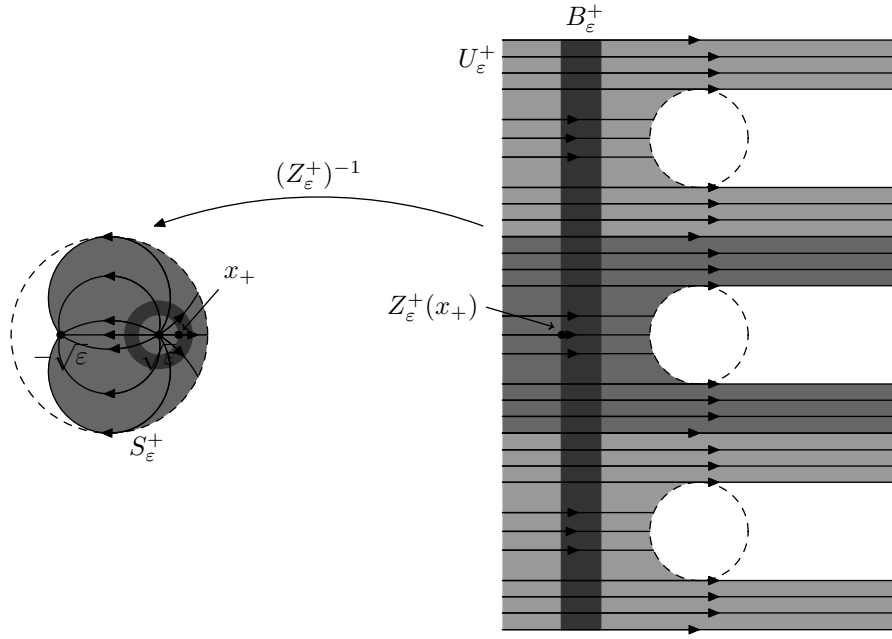


Figure 26. Bande verticale, domaine U_ε^+ et lignes de flot du champ (4.1.1) pour $\varepsilon > 0$, avec une région (gris foncé) en bijection avec S_ε^+ .

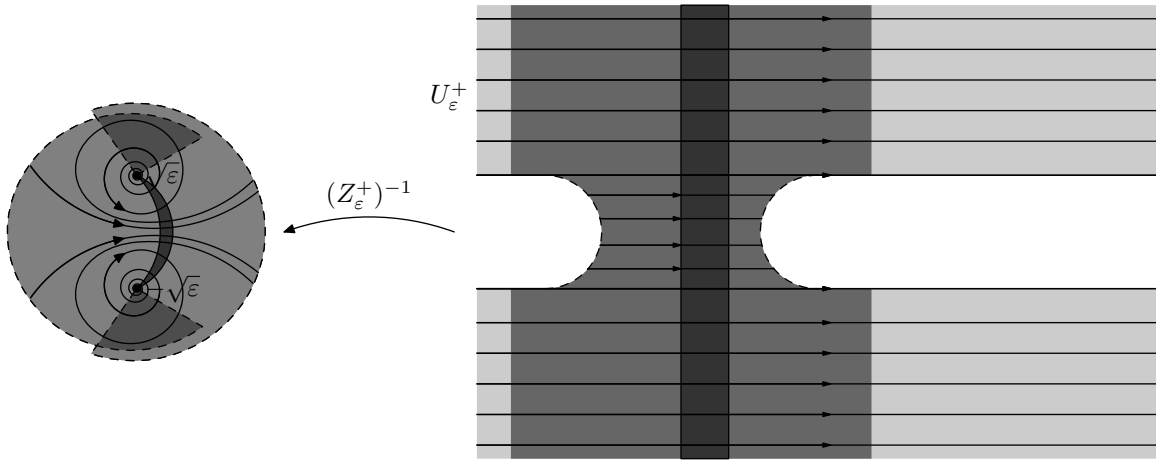


Figure 27. Bande verticale, domaine U_ε^+ et lignes de flot du champ (4.1.1) pour $\varepsilon < 0$.

4.1.2. Applications quasiconformes

On décrit brièvement la théorie des applications quasiconformes qui sera utilisée dans le but de construire les coordonnées de Fatou. On se réfère principalement au livre de Lehto [13] et au livre d'Ahlfors [1].

Afin d'éviter d'introduire plus de concepts que nécessaire, on utilise une propriété équivalente à la définition habituelle d'être quasiconforme. On réfère le lecteur au livre de Lehto [13]

pour les définitions classiques et la démonstration que la définition suivante est équivalente à la définition au sens classique.

Définition 4.1.4. Soit $U, V \subseteq S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ des domaines de la sphère de Riemann. Un homéomorphisme $h: U \rightarrow V$ est une application quasiconforme si h possède des dérivées partielles h_x et h_y presque partout telles que $h_x, h_y \in L^2_{\text{loc}}(U)$ et si de plus son coefficient de dilatation complexe, défini par

$$\mu := \frac{h_{\bar{z}}}{h_z}, \quad (4.1.9)$$

est une fonction mesurable sur U telle que $\|\mu\|_\infty < 1$.

Si l'on imagine les applications conformes comme des fonctions qui envoient les cercles infinitésimaux sur des cercles infinitésimaux, les applications quasiconformes sont des applications qui envoient les cercles infinitésimaux sur des ellipses infinitésimales. Leur coefficient de dilatation complexe mesure à quel point ces cercles ont été déformés. En particulier, une application quasiconforme est holomorphe sur les ouverts où $\mu \equiv 0$.

Plusieurs théorèmes garantissent l'existence d'une application quasiconforme de coefficient de dilatation μ .

Théorème 4.1.5 (d'Ahlfors-Bers ([13])). Soit $U \subseteq S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ un domaine de la sphère de Riemann et soit $\mu: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Si $\|\mu\|_\infty < 1$, alors il existe une application quasiconforme h solution de l'équation de Beltrami

$$h_{\bar{z}} = \mu h_z. \quad (4.1.10)$$

De plus, si m est une autre solution à cette équation, alors il existe une application conforme g telle que $h = g \circ m$.

Si $U = S^2$ la sphère de Riemann, alors il existe une unique solution h qui satisfait à $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ et $h(\infty) = \infty$. On appelle h la solution normale.

On remarque qu'il est toujours possible de prolonger $\mu: U \rightarrow \mathbb{C}$ sur S^2 par

$$\mu(z) = \begin{cases} \mu(z), & \text{si } z \in U; \\ 0, & \text{si } z \in S^2 \setminus U. \end{cases}$$

Ainsi, on peut toujours choisir la solution normale de ce prolongement comme solution à l'équation de Beltrami.

Les applications quasiconformes offrent une façon de trouver des applications conformes. Si h est quasiconforme et si μ est le coefficient de dilatation complexe de h^{-1} , alors une solution à l'équation de Beltrami m_μ sera telle que $m_\mu \circ h$ est conforme. En effet, puisque m_μ et h^{-1} sont deux solutions à la même équation de Beltrami, il existe une application conforme g telle que $h^{-1} = g \circ m_\mu$.

Finalement, on note que si μ dépend de paramètres réels ou complexes de façon réelle analytique ou holomorphe, alors il en est de même pour la solution normale. Voir [2] pour

les détails. On recommande aussi le livre [1], bien qu'il n'énonce un théorème que pour un paramètre réel, il est possible d'en déduire le cas de dépendance holomorphe. On cite le théorème suivant de [2] sur les paramètres complexes qui permettra de déduire un résultat analogue sur les paramètres réels.

Théorème 4.1.6 ([2]). *Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n ou de \mathbb{C}^n . Soit $\mu: U \times S^2 \rightarrow \mathbb{C}; (\varepsilon, z) \mapsto \mu(\varepsilon, z)$. On pose $\mu_\varepsilon(z) := \mu(\varepsilon, z)$ et on suppose que $\|\mu_\varepsilon\|_\infty \leq k < 1$ uniformément en ε .*

1. *Si μ_ε est continue en ε , alors la solution normale à l'équation de Beltrami est continue en ε .*
2. *Si $U \subset \mathbb{C}^n$ et si μ_ε est holomorphe en ε , alors la solution normale à l'équation de Beltrami est holomorphe en ε .*

Le résultat analogue pour les paramètres réels analytiques en découle directement, puisqu'il suffit de complexifier les paramètres pour appliquer le théorème et ensuite se restreindre à nouveau aux valeurs réelles des paramètres.

4.1.3. Construction des coordonnées de Fatou (cas holomorphe)

Les coordonnées de Fatou sont des difféomorphismes définis sur les domaines de translation qui conjuguent G_ε , le relevé de g_ε dans la coordonnée temps, sur T_1 , la forme normale. On décrit brièvement leur construction selon la méthode de Shishikura [18]. On peut consulter [14] où la construction des coordonnées de Fatou est effectuée dans le cas d'une déformation à un paramètre complexe d'un germe holomorphe parabolique de codimension 1. Le but sera par la suite de trouver des coordonnées de Fatou pour f_ε .

La construction utilise les applications quasiconformes. Elle est effectuée comme suit. On rectifie d'abord G_ε à T_1 par une application quasiconforme k_ε sur une bande B_ℓ , qui est la région comprise entre une droite ℓ et $G_\varepsilon(\ell)$, incluant sa frontière. Ceci induit une structure quasiconforme sur la bande verticale de largeur 1. On prolonge cette structure sur \mathbb{C} et on la corrige à l'aide du théorème d'Ahlfors-Bers. On obtient ainsi un homéomorphisme quasiconforme M_ε qui commute avec T_1 et qui est tel que $M_\varepsilon \circ k_\varepsilon$ est conforme. Cette dernière composée est une coordonnée de Fatou. On la prolonge sur le domaine translation U_ε à l'aide de la relation $(M_\varepsilon \circ k_\varepsilon) \circ G_\varepsilon = T_1 \circ (M_\varepsilon \circ k_\varepsilon)$.

Au travers de la construction, on s'intéressera également à la dépendance des paramètres de k_ε et de M_ε . On note que dans le cas holomorphe, les coordonnées de Fatou ne sont pas uniques, mais en faisant un bon choix, on peut obtenir une dépendance continue du paramètre autour de $\varepsilon = 0$ et réelle analytique ailleurs. (Voir [14], où l'holomorphie est utilisée au lieu de l'analyticité réelle.) On rappelle que $(-r', r') \times D(0, r)$ est le domaine d'un représentant du germe f_ε .

Théorème 4.1.7 ([14]). Soit f_0 un germe antiholomorphe parabolique et soit f_ε une déformation de f_0 à un paramètre réel. Soit $g_\varepsilon := f_\varepsilon \circ f_\varepsilon$ et G_ε le relèvement de g_ε sur la coordonnée temps. Alors il existe r et r' assez petits tels que les résultats suivants sont vrais.

1. (Existence) Pour tout $\varepsilon \in (-r', r')$, il existe un difféomorphisme (sur son image) $\Phi_\varepsilon^\pm : U_\varepsilon^\pm \rightarrow \mathbb{C}$ tel que

$$\Phi_\varepsilon^\pm \circ G_\varepsilon \circ (\Phi_\varepsilon^\pm)^{-1} = T_1. \quad (4.1.11)$$

On appelle Φ_ε^\pm une coordonnée de Fatou de g_ε sur U_ε^\pm .

2. (Unicité) Si Φ' est une autre coordonnée de Fatou sur U_ε^\pm , alors il existe une constante $C^\pm \in \mathbb{C}$ telle que

$$\Phi_\varepsilon^\pm \circ (\Phi')^{-1} = T_{C^\pm}.$$

3. Pour $\varepsilon > 0$, les coordonnées de Fatou de U_ε^\pm commutent avec T_{α_\pm} , où α_\pm est la période définie à l'équation (4.1.3).
4. (Dépendance du paramètre) L'ensemble

$$Q^\pm = \bigcup_{\varepsilon} \{\varepsilon\} \times U_\varepsilon^\pm$$

est ouvert dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^2$. De plus, l'application $\Phi(\varepsilon, Z) = \Phi_\varepsilon(Z)$, où $\Phi_\varepsilon(Z_0^\pm) = 0$ pour Z_0^\pm fixé, est continue sur Q^\pm et analytique mixte pour $\varepsilon \neq 0$.

Démonstration. 1. (Existence) On fixe Z_0^\pm pour tout ε . On peut prendre par exemple un point à une distance de 3 à gauche du trou fondamental pour le signe $+$ et à droite pour le signe $-$. Ce point sera utilisé comme point de base sur U_ε^\pm .

Sur la carte U_ε^\pm , on considère une droite verticale ℓ^\pm passant par Z_0^\pm et son image $G_\varepsilon(\ell^\pm)$ qui est à droite de ℓ^\pm si r et r' sont assez petits. Soit B_ε^\pm la « bande » fermée comprise entre ℓ^\pm et $G_\varepsilon(\ell^\pm)$. Soit également B' la bande verticale de largeur 1

$$B' = \{Z = X + iY \mid 0 \leq X \leq 1, Y \in \mathbb{R}\}.$$

On considère l'homéomorphisme $h_\varepsilon : B_\varepsilon^\pm \rightarrow B'$ qui envoie l'intervalle $[Z_0^\pm + iY, G_\varepsilon(Z_0^\pm + iY)]$ sur $[iY, 1 + iY]$ de manière affine, voir la figure 28. Il possède ainsi la propriété que pour $Z \in \ell^\pm$, on a

$$h_\varepsilon \circ G_\varepsilon = T_1 \circ h_\varepsilon.$$

Cette propriété sera utilisée un peu plus tard. Remarquons aussi que $h_\varepsilon(Z_0^\pm) = 0$.

On peut définir son inverse explicitement par

$$h_\varepsilon^{-1}(X + iY) = (1 - X)(Z_0^\pm + iY) + XG_\varepsilon(Z_0^\pm + iY). \quad (4.1.12)$$

On utilisera le théorème 4.1.5 pour trouver une application quasiconforme qui, composée avec h_ε , sera conforme et qui aura les propriétés nécessaires.

À l'aide de l'équation (4.1.12), on peut montrer que h_ε et h_ε^{-1} sont quasiconformes, pourvu que r et r' soient assez petits. Les détails de ces calculs se trouvent dans [14]. Soit μ_ε le coefficient de dilatation complexe de h_ε^{-1} .

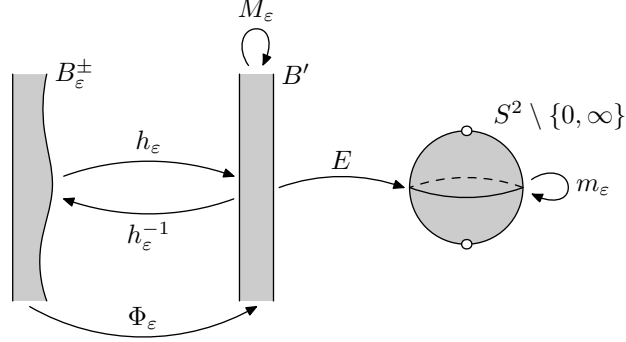


Figure 28. Schéma des fonctions et de leur domaine pour la construction d'une coordonnée de Fatou.

Soit E le revêtement universel

$$\begin{aligned} E: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^* \equiv S^2 \setminus \{0, \infty\}, \\ Z &\mapsto w = \exp(-2i\pi Z), \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

voir la figure 28. Lorsque l'on restreint E à la bande ouverte à droite $B'_0 := \{0 \leq X < 1, Y \in \mathbb{R}\} \subset B'$, il devient un homéomorphisme de $B'_0 \rightarrow \mathbb{C}^*$. On considère la composée $h_\varepsilon^{-1} \circ E^{-1}: \mathbb{C}^* \rightarrow B_\varepsilon^\pm$ qui est toujours quasiconforme, car E^{-1} est conforme. Soit μ'_ε le coefficient de dilatation complexe de la composée.

On étend μ'_ε sur la sphère de Riemann par $\mu'_\varepsilon(0) = \mu'_\varepsilon(\infty) = 0$. Par le théorème d'Ahlfors-Bers (théorème 4.1.5), il existe un homéomorphisme quasiconforme $m_\varepsilon: S^2 \rightarrow S^2$ tel que $m_\varepsilon(0) = 0$, $m_\varepsilon(1) = 1$ et $m_\varepsilon(\infty) = \infty$, et m_ε est solution de l'équation de Beltrami

$$m_{\bar{w}} = \mu'_\varepsilon m_w.$$

Ainsi, la composée $m_\varepsilon \circ E \circ h_\varepsilon$ est conforme. De plus, l'application $m_\varepsilon \circ E: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ se relève en une application $M_\varepsilon: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ déterminée de façon unique par $M_\varepsilon(0) = 0$ et $M_\varepsilon(1) = 1$, voir la figure 28. On montre que cette application commute avec T_1 . En effet, on pose $N = M_\varepsilon \circ T_1 \circ M_\varepsilon^{-1}$. Ceci induit l'identité sur S^2 par le recouvrement universel E . Il en suit que N est une transformation de revêtement de E , c'est-à-dire une puissance de T_1 , et puisque $N(0) = 1$, on voit que $N = T_1$, d'où M_ε et T_1 commutent.

Ceci permet de conclure, pour $Z \in \ell^\pm$, que

$$\begin{aligned} M_\varepsilon \circ h_\varepsilon \circ G_\varepsilon &= M_\varepsilon \circ T_1 \circ h_\varepsilon & (\text{car } h_\varepsilon \circ G_\varepsilon \circ h_\varepsilon^{-1} &= T_1) \\ &= T_1 \circ M_\varepsilon \circ h_\varepsilon. \end{aligned}$$

On pose $\Phi_\varepsilon^\pm := M_\varepsilon \circ h_\varepsilon$ qui satisfait à

$$\Phi_\varepsilon^\pm \circ G_\varepsilon(Z) = T_1 \circ \Phi_\varepsilon^\pm(Z) \quad (4.1.14)$$

pour $Z \in \ell^\pm$. Cette relation permet d'étendre le domaine de Φ_ε^\pm à U_ε^\pm .

2. (Unicité) Si Φ_1 et Φ_2 sont deux coordonnées de Fatou sur U_ε^\pm qui satisfont à (4.1.14), alors $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ est un difféomorphisme qui commute avec T_1 . Ainsi, en utilisant à nouveau le recouvrement universel E , on voit que $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ induit un difféomorphisme $\varphi: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$. Puisque $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ envoie un demi-plan $\{\Im Z > R\}$ (resp. $\{\Im Z < R'\}$) sur un domaine contenant un demi-plan $\{\Im Z > R_1\}$ (resp. $\{\Im Z < R'_1\}$), il suit que φ se prolonge en 0 et à l'infini par $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\infty) = \infty$. Un tel difféomorphisme est nécessairement une application linéaire, donc $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ est une translation.

3. On rappelle que les « secteurs » S_ε^\pm sont définis par $S_\varepsilon^\pm = (Z_\varepsilon^\pm)^{-1}(U_\varepsilon^\pm)$. Pour $\varepsilon > 0$, g_ε est linéarisable sur S_ε^\pm , car celui-ci contient seulement le point fixe simple $\pm\sqrt{\varepsilon}$. Ainsi, g_ε et v^1 sont conjugués sur S_ε^\pm , puisqu'ils sont tous deux linéarisables près de $\pm\sqrt{\varepsilon}$. Soit k_ε la conjugaison qui est telle que $k_\varepsilon \circ g_\varepsilon \circ k_\varepsilon^{-1} = v^1$.

On relève k_ε sur U_ε^\pm en K_ε^\pm par Z_ε . Puisque k_ε est uniforme sur S_ε^\pm , il suit que K_ε^\pm et T_{α_\pm} commutent.

Enfin, K_ε donne une coordonnée de Fatou, car la relation $k_\varepsilon \circ g_\varepsilon \circ k_\varepsilon^{-1} = v^1$ devient $K_\varepsilon \circ G_\varepsilon \circ K_\varepsilon^{-1} = T_1$. Par unicité des coordonnées de Fatou, pour chaque Φ_ε , il existe C_ε tel que $\Phi_\varepsilon = T_{C_\varepsilon} \circ K_\varepsilon$, donc toutes les coordonnées de Fatou commutent avec T_{α_\pm} , dans le cas où $\varepsilon > 0$.

4. (Dépendance des paramètres) On commence par montrer que Q^\pm est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^2$. Soit B_ε^\pm la « bande » fermée comprise entre ℓ^\pm et $G_\varepsilon(\ell^\pm)$. Cette bande est contenue dans une bande ouverte B_2 de largeur 2 pour tout ε , comme sur la figure 4.1.3. Ainsi, pour tout $Z \in B_2$, il existe un voisinage $\mathcal{O}_{r_Z} = (-r', r') \times B(Z, r_Z)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^2$ qui est contenu dans Q^\pm .

Soit maintenant $(\varepsilon_0, Z_0) \in Q^\pm$. On cherche un voisinage de ce point. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $G_{\varepsilon_0}^{oj}(Z_0) \in U_{\varepsilon_0}$ pour $j = 0, \dots, n$ et $Z_1 := G_{\varepsilon_0}^{on}(Z_0) \in B_{\varepsilon_0}^\pm$. Par ce qui précède, il existe un ouvert $\mathcal{O}_{r_{Z_1}} \subset Q^\pm$ de (ε_0, Z_1) . La position des trous dépend continûment de ε , donc il existe $\eta > 0$ et r_{Z_1} assez petit tels que $(\varepsilon_0 - \eta, \varepsilon_0 + \eta) \times B(Z_0, r_{Z_1})$ est un voisinage de (ε_0, Z_0) . Ceci montre que Q^\pm est ouvert.

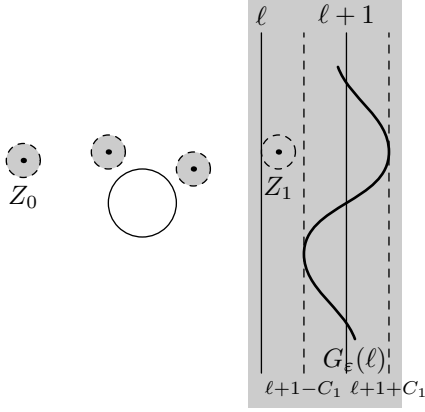


Figure 29. Bande ouverte (en gris) à côté du trou fondamental et suite de points $G^{on}(Z_0)$.

Ensuite, pour chaque ε , on prend Φ_ε^\pm comme l'unique coordonnée de Fatou sur U_ε^\pm déterminée par $\Phi_\varepsilon^\pm(Z_0^\pm) = 0$. On pose $\Phi^\pm(\varepsilon, Z) = \Phi_\varepsilon^\pm(Z)$.

On montre que Φ^\pm est analytique en ε pour $\varepsilon \neq 0$ en regardant à h_ε et à M_ε . Par le théorème 4.1.6, si μ_ε dépend de ε de façon analytique, alors M_ε aussi. De plus, selon la formule (4.1.12), on voit que h_ε^{-1} dépend de ε de façon analytique et donc μ_ε aussi.

Pour la continuité en $\varepsilon = 0$, on voit également par l'équation (4.1.12) que pour tout $Z_0 \in B'$, on a

$$\lim_{(Z, \varepsilon) \rightarrow (Z_0, 0)} h_\varepsilon^{-1}(Z) = h_0^{-1}(Z_0).$$

De plus, un petit calcul montre que les dérivées $\partial_X h_\varepsilon^{-1}$ et $\partial_Y h_\varepsilon^{-1}$ sont aussi continues en ε , donc μ_ε aussi et par le théorème 4.1.6, M_ε aussi. □

4.1.4. Existence des coordonnées de Fatou (cas antiholomorphe)

On se prépare maintenant à montrer l'existence des coordonnées de Fatou pour le cas antiholomorphe. L'existence et l'unicité se montrent de la même façon que pour le cas où $\varepsilon = 0$; plutôt que de construire les coordonnées de Fatou comme à la section précédente, on montre qu'on peut choisir parmi les coordonnées de Fatou de g_ε une sous-famille qui fonctionne pour f_ε . On rappelle que $(-r', r') \times D(0, r)$ est le domaine d'un représentant du germe f_ε .

Théorème 4.1.8 (Coordonnées de Fatou (cas antiholomorphe)). *Soit f_ε une déformation à un paramètre réel sous forme préparée d'un germe antiholomorphe parabolique f_0 de codimension 1. Soit F_ε l'expression de f_ε dans la coordonnée temps.*

1. (Existence) Pour chaque $\varepsilon > 0$ (resp. $\varepsilon < 0$), sur chaque domaine de translation de Glutsyuk (resp. Lavaurs) U_ε^\pm , il existe un difféomorphisme $\Phi_\varepsilon^\pm: \tilde{U}_\varepsilon^\pm \rightarrow \mathbb{C}$ tel que

$$\Phi_\varepsilon^\pm \circ F_\varepsilon \circ (\Phi_\varepsilon^\pm)^{-1} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}. \quad (4.1.15)$$

2. (Unicité) Si $\tilde{\Phi}_\varepsilon^\pm$ est un autre difféomorphisme qui satisfait à (4.1.15), alors il existe une constante réelle R_\pm telle que

$$\Phi_\varepsilon^\pm \circ (\tilde{\Phi}_\varepsilon^\pm)^{-1} = T_{R_\pm}.$$

3. Pour $\varepsilon > 0$, les coordonnées de Fatou sur U_ε^\pm commutent avec T_{α_\pm} , où α_\pm est la période définie à l'équation (4.1.3).

4. (Dépendance du paramètre) L'ensemble

$$Q^\pm = \bigcup_{\varepsilon} \{\varepsilon\} \times U_\varepsilon^\pm$$

est ouvert. De plus, il existe une famille de coordonnées de Fatou Φ^\pm continue sur Q^\pm et analytique mixte pour $\varepsilon \neq 0$.

Corollaire 4.1.9 (Unicité de la famille). *Une famille de coordonnées de Fatou de f_ε est uniquement déterminée par*

$$\overline{\Phi_\varepsilon(X_\varepsilon)} + \Phi_\varepsilon(X_\varepsilon) = C(\varepsilon), \quad (4.1.16)$$

où X_ε est un point de base et C , une fonction à valeurs réelles. Une telle famille est analytique mixte en (ε, Z) pour $\varepsilon \neq 0$ et continue en $\varepsilon = 0$, pourvu que X_ε et C le soient. En particulier, on peut prendre $C \equiv 0$ et X_ε constant.

Démonstration du corollaire. Supposons que deux familles $\Phi_{j,\varepsilon}$, $j = 1, 2$, satisfont à (4.1.16), c'est-à-dire que

$$\overline{\Phi_{1,\varepsilon}(X_\varepsilon)} + \Phi_{1,\varepsilon}(X_\varepsilon) = \overline{\Phi_{2,\varepsilon}(X_\varepsilon)} + \Phi_{2,\varepsilon}(X_\varepsilon).$$

Par unicité, il existe une fonction D en ε à valeurs réelles telle que $\Phi_{2,\varepsilon} = T_{D(\varepsilon)} \circ \Phi_{1,\varepsilon}$. Ainsi, en utilisant l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\Phi_{2,\varepsilon}(X_\varepsilon)} + \Phi_{2,\varepsilon}(X_\varepsilon) - \overline{\Phi_{1,\varepsilon}(X_\varepsilon)} - \Phi_{1,\varepsilon}(X_\varepsilon) \\ &= \overline{T_{D(\varepsilon)} \circ \Phi_{1,\varepsilon}(X_\varepsilon)} + T_{D(\varepsilon)} \circ \Phi_{1,\varepsilon}(X_\varepsilon) - \overline{\Phi_{1,\varepsilon}(X_\varepsilon)} - \Phi_{1,\varepsilon}(X_\varepsilon) \\ &= \overline{D(\varepsilon)} + D(\varepsilon) \\ &= 2D(\varepsilon). \end{aligned}$$

D'où $\Phi_{2,\varepsilon} = \Phi_{1,\varepsilon}$.

Ensuite, pour voir qu'une famille Φ_ε déterminée par (4.1.16) est analytique en $\varepsilon \neq 0$, on considère une famille $\tilde{\Phi}_\varepsilon$ analytique en $\varepsilon \neq 0$ et continue en ε , dont l'existence est garantie par le théorème 5.2.5. Par unicité, il existe une fonction E en ε à valeurs réelles telle que $\tilde{\Phi}_\varepsilon = T_{E(\varepsilon)} \circ \Phi_\varepsilon$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{\Phi}_\varepsilon(X_\varepsilon)} + \tilde{\Phi}_\varepsilon(X_\varepsilon) &= \overline{E(\varepsilon)} + \overline{\Phi_\varepsilon(X_\varepsilon)} + E(\varepsilon) + \Phi_\varepsilon(X_\varepsilon) \\ &= 2E(\varepsilon) + C(\varepsilon). \end{aligned}$$

On isole E dans l'équation

$$2E(\varepsilon) = \overline{\tilde{\Phi}_\varepsilon(X_\varepsilon)} + \tilde{\Phi}_\varepsilon(X_\varepsilon) - C(\varepsilon).$$

Le côté droit est analytique en $\varepsilon \neq 0$ et continue en ε , donc E l'est aussi. Il s'ensuit que $\Phi_\varepsilon = T_{-E(\varepsilon)} \circ \tilde{\Phi}_\varepsilon$ l'est aussi. \square

Démonstration du théorème 4.1.8. 1. et 4. On omet le signe \pm , puisque la démonstration est la même pour $+$ et pour $-$. Soit Φ'_ε une famille de coordonnées de Fatou de $f_\varepsilon \circ f_\varepsilon$ déterminée par $\Phi'_\varepsilon(Z_0) = 0$, comme dans l'énoncé du théorème 4.1.7, de sorte que Φ'_ε soit continue en ε et réelle analytique en $\varepsilon \neq 0$. On pose $R_\varepsilon = \Phi'_\varepsilon \circ F_\varepsilon \circ (\Phi'_\varepsilon)^{-1}$, qui commute avec T_1 puisque $R_\varepsilon \circ R_\varepsilon = T_1$. On pose donc $H_\varepsilon = R_\varepsilon \circ \Sigma - id$, qui est une fonction 1-périodique. On montre que H_ε est constante ; ceci permettra de conclure que $R_\varepsilon = \Sigma \circ T_{C_\varepsilon}$, où C_ε est une constante complexe qui a la même régularité en ε que R_ε . Ensuite, puisque $R_\varepsilon \circ R_\varepsilon = T_1$, il en découlera que $C_\varepsilon = \frac{1}{2} + iy_\varepsilon$. En prenant $\Phi_\varepsilon = T_{-\frac{iy_\varepsilon}{2}} \circ \Phi'_\varepsilon$, on obtiendra $\Phi_\varepsilon \circ F_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon^{-1} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$, comme voulu, où Φ_ε a la régularité souhaitée.

On montre que H_ε est constante séparément pour les cas $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon < 0$.

Pour $\varepsilon > 0$, H_ε est une fonction 1-périodique et α_\pm -périodique, où le signe correspond à celui de U_ε^\pm . (On rappelle que α_\pm est la période définie à l'équation (4.1.3).) Une fonction holomorphe ayant deux telles périodes doit être constante, par le théorème de Liouville. En effet, H_ε se prolonge par périodicité en une fonction entière et si P désigne le parallélogramme engendré par 1 et α_\pm , alors on a $H_\varepsilon(P) = H_\varepsilon(\mathbb{C})$, qui est bornée.

Pour $\varepsilon < 0$, on peut utiliser le même argument que le cas $\varepsilon = 0$, car $\tilde{U}_\varepsilon^\pm$ contient une bande verticale et les limites de H_ε lorsque $\Im W \rightarrow \pm\infty$ sont bornées, par le lemme 4.1.2, donc la série de Fourier de H_ε est constante.

2. Si $\tilde{\Phi}_\varepsilon$ est une autre coordonnée de Fatou telle que $\tilde{\Phi}_\varepsilon \circ F_\varepsilon \circ \tilde{\Phi}_\varepsilon^{-1} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$, alors par l'unicité du cas holomorphe, il existe une constante *à priori* complexe C telle que $\Phi_\varepsilon \circ \tilde{\Phi}_\varepsilon^{-1} = T_C$. Dans ce cas, il suit que T_C commute avec $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$, donc C est réel.

3. Ceci découle directement du point 3 du théorème 4.1.7.

□

4.2. Module de classification

Comme on le sait déjà, la codimension de f_0 (ou le nombre de points fixes de g_ε dans $D(0, r)$ en comptant la multiplicité), l'invariant formel b et le paramètre canonique ε sont des invariants de f_ε . Afin de déterminer si deux déformations de f_0 sont équivalentes, on introduit un dernier invariant : l'*invariant géométrique*.

L'invariant géométrique est constitué d'une famille de classes d'équivalence de fonctions de transition. C'est le dernier ingrédient nécessaire à la description des orbites de f_ε . Commençons par quelques observations simples à propos des orbites de $g_\varepsilon = f_\varepsilon \circ f_\varepsilon$ dans la coordonnée z .

On peut diviser le disque $D(0, r)$ en différentes régions selon le comportement des orbites. Pour $\varepsilon < 0$, on divise le disque $D(0, r)$ en trois parties, comme sur la figure 30a, en regroupant les orbites en trois types :

1. les orbites du bassin de $\sqrt{\varepsilon}$, c'est-à-dire celles qui ont un nombre infini d'itérées autour de $\sqrt{\varepsilon}$;
2. les orbites qui ont un nombre fini d'itérées à l'intérieur de $D(0, r)$;
3. les orbites du bassin de $-\sqrt{\varepsilon}$, c'est-à-dire celles qui ont un nombre infini d'itérées autour de $-\sqrt{\varepsilon}$.

On notera par S_ε^1 , S_ε^2 et S_ε^3 l'ensemble des orbites de type 1, 2 et 3 respectivement. On a ainsi $D(0, r) = S_\varepsilon^1 \cup S_\varepsilon^2 \cup S_\varepsilon^3$.

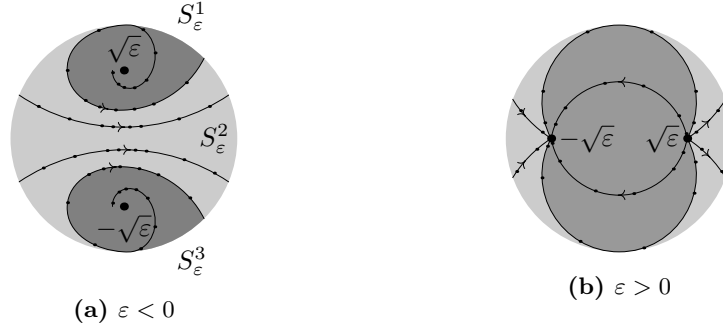


Figure 30. Division du disque $D(0, r)$ en trois régions.

Pour $\varepsilon > 0$, il n'est pas nécessaire de diviser le disque en trois, mais on remarque tout de même les trois types d'orbites :

1. les orbites qui partent de $\sqrt{\varepsilon}$ et qui se rendent à la frontière de $D(0, r)$;
2. les orbites qui partent de $\sqrt{\varepsilon}$ et qui se rendent à $-\sqrt{\varepsilon}$;
3. les orbites qui se rendent à $-\sqrt{\varepsilon}$, mais qui ne partent pas de $\sqrt{\varepsilon}$.

La région qui nous importe est celle composée des orbites du point 2. Elle correspond à $S_\varepsilon^+ \cap S_\varepsilon^-$.

4.2.1. Changements de carte

Pour cette section, on s'intéresse aux orbites de la forme normale holomorphe v_ε^1 . On rappelle que dans les cartes de la coordonnée temps, la forme normale correspond à T_1 et ses orbites, à $\{Z + n\}_n$.

Pour $\varepsilon < 0$, sur la coordonnée temps, S_ε^1 (resp. S_ε^3) correspond à une région au-dessus (resp. au-dessous) du trou fondamental contenant un demi-plan de la forme $\{\Im Z > R\}$ (resp. $\{\Im Z < R\}$). Le domaine S_ε^2 correspond à la région entre deux trous. On définit les régions dans la coordonnée temps par

$$U_{\varepsilon, j}^\pm = \{Z \in U_\varepsilon^\pm \mid (Z_\varepsilon^\pm)^{-1}(Z) \in S_\varepsilon^j\}. \quad (4.2.1)$$

Voir la figure 31b.

Pour $\varepsilon > 0$, sur la coordonnée temps U_ε^\pm , le domaine $S_\varepsilon^+ \cap S_\varepsilon^-$ correspond à plusieurs composantes connexes en forme de bandes horizontales séparées entre elles par la translation T_{α_\pm} . Voir la figure 31a. On s'intéressera à deux composantes connexes : celle directement au-dessus du trou fondamental, notée $U_{\varepsilon,U}^\pm$, et celle directement au-dessous, notée $U_{\varepsilon,L}^\pm$.

Rappelons que selon la formule (4.1.5), on a pour $z \in D(0, r) \setminus [-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}]$ avec $\Im z > 0$

$$Z_\varepsilon^+(z) - Z_\varepsilon^-(z) = i\pi b,$$

ce qui se réarrange en $Z_\varepsilon^- \circ (Z_\varepsilon^+)^{-1} = T_{-i\pi b}$. Ce difféomorphisme s'interprète de la façon suivante sur les orbites de v_ε^1 : pour $\varepsilon > 0$ (resp. $\varepsilon < 0$), cette translation permet d'identifier l'orbite de z dans $U_{\varepsilon,U}^+$ (resp. $U_{\varepsilon,1}^+$) à son orbite dans $U_{\varepsilon,U}^-$ (resp. $U_{\varepsilon,1}^-$). On peut ainsi prolonger $T_{-i\pi b}$ sur $U_{\varepsilon,U}^+$ (resp. $U_{\varepsilon,1}^+$). Notons que pour $\varepsilon < 0$, l'orbite de z tourne et passe au-dessus de $\sqrt{\varepsilon}$. On obtient un difféomorphisme sur la région au-dessus du trou fondamental

$$T_{-i\pi b} : \begin{cases} U_{\varepsilon,U}^+ \rightarrow U_{\varepsilon,U}^-, & \text{si } \varepsilon > 0, \\ U_{\varepsilon,1}^+ \rightarrow U_{\varepsilon,1}^-, & \text{si } \varepsilon < 0. \end{cases} \quad (4.2.2)$$

On appellera $T_{-i\pi b}$ un *changement de carte*¹. Voir la figure 31.

On obtient le changement carte

$$T_{i\pi b} : \begin{cases} U_{\varepsilon,L}^+ \rightarrow U_{\varepsilon,L}^-, & \text{si } \varepsilon > 0, \\ U_{\varepsilon,3}^+ \rightarrow U_{\varepsilon,3}^-, & \text{si } \varepsilon < 0, \end{cases} \quad (4.2.3)$$

au-dessous du trou fondamental de la même façon à l'aide de la formule (4.1.5), pour $z \in D(0, r) \setminus [-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}]$ avec $\Im z < 0$. Voir la figure 31.

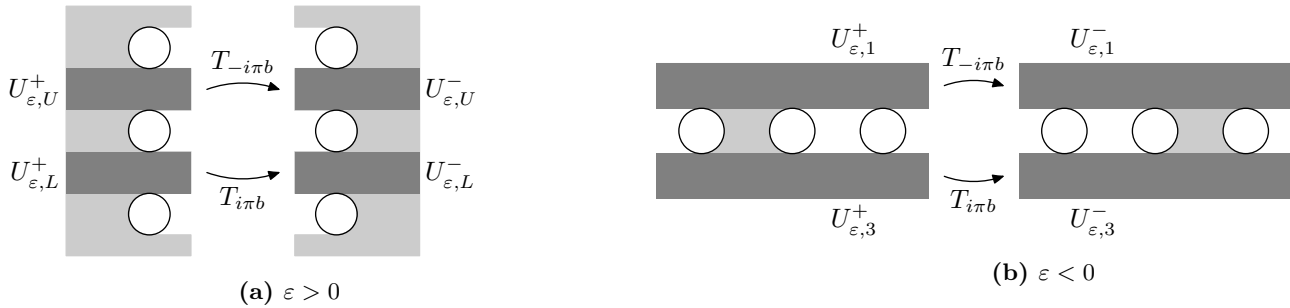


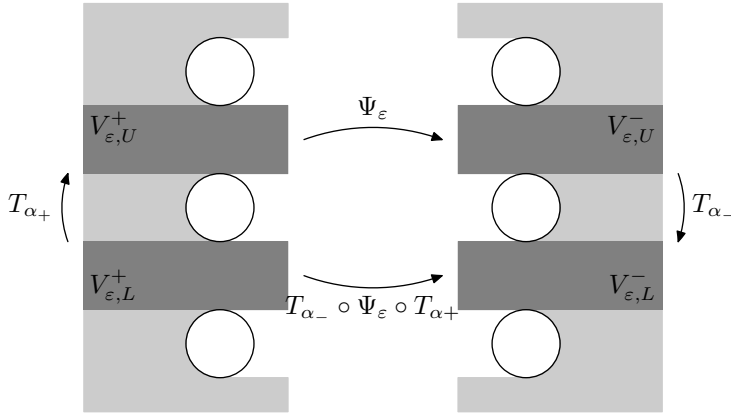
Figure 31. Changements de carte et leur domaine dans la coordonnée temps.

1. On verra à la section 4.2.2 que les changements de carte correspondent aux fonctions de transition de la forme normale.

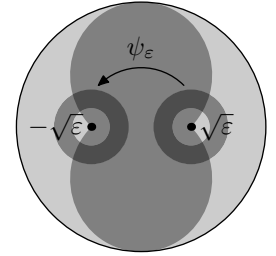
4.2.2. Fonctions de transition

Après avoir regardé la forme normale, on revient au cas du difféomorphisme g_ε . Les fonctions de transition permettent d'identifier les points d'un domaine fondamental (un anneau pour $\varepsilon > 0$, figure 32b, ou un croissant pour $\varepsilon < 0$, figure 33 sur le disque en bas) qui appartiennent à la même orbite dans l'autre domaine fondamental.

Pour $\varepsilon > 0$, on voit que les deux anneaux de la figure 32b intersectent les mêmes orbites sur la région gris foncé, qui correspond à $S_\varepsilon^+ \cap S_\varepsilon^-$ (les orbites de type 2 discutées au début de la section 4.2). On voit que l'on pourra définir une fonction de transition allant d'une portion de l'anneau de droite vers une portion de l'anneau de gauche.



(a) Sur la coordonnée temps.



(b) Sur les tores vu dans la coordonnée z de départ.

Figure 32. Fonction de transition ($\varepsilon > 0$).

Pour $\varepsilon < 0$, une orbite de S_ε^1 (resp. S_ε^3) s'enroule autour de $\sqrt{\varepsilon}$ (resp. $-\sqrt{\varepsilon}$). Un point qui part d'un croissant viendra intersecter l'autre croissant après avoir tourné autour de $\sqrt{\varepsilon}$ (resp. $-\sqrt{\varepsilon}$). On pourra définir deux fonctions de transition, une à chacun des extrémités du croissant de droite vers l'extrémité correspondant du croissant de gauche, et une fonction de transition globale du croissant de gauche vers le croissant de droite (passant entre les deux points). Voir la figure 33 en bas.

Les fonctions de transition sont définies sur les coordonnées de Fatou à l'aide des changements de carte $T_{\pm i\pi b}$ de la section 4.2.1.

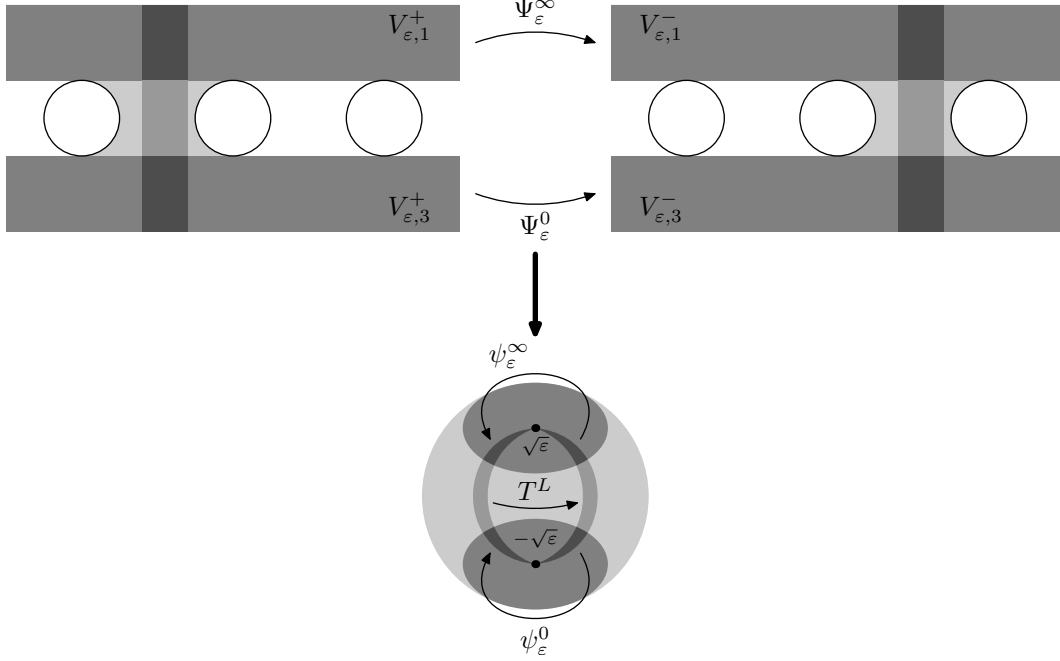


Figure 33. Fonctions de transition dans la coordonnée temps (en haut) et dans la coordonnée sur la sphère (vues dans le domaine de départ en bas) ($\epsilon < 0$).

Définition 4.2.1. Soit $(\Phi_\epsilon^+, \Phi_\epsilon^-)$ un choix d'une paire de coordonnées de Fatou de f_ϵ sur U_ϵ^+ et U_ϵ^- respectivement. Soit $V_\epsilon^\pm = \Phi_\epsilon^\pm(U_\epsilon^\pm)$. On définit une fonction de transition de f_ϵ au-dessus du trou fondamental par

$$\Psi_\epsilon = \Phi_\epsilon^- \circ T_{-i\pi b} \circ (\Phi_\epsilon^+)^{-1}, \quad (4.2.4)$$

où $T_{-i\pi b}$ est le changement de carte de l'équation (4.2.2). On la note Ψ_ϵ^∞ lorsque $\epsilon \leq 0$ et Ψ^U lorsque $\epsilon > 0$. Voir les figures 32a et 33.

Pour $\epsilon \leq 0$, on définit une fonction de transition de f_ϵ au-dessous du trou fondamental par

$$\Psi_\epsilon^0 = \Phi_\epsilon^- \circ T_{i\pi b} \circ (\Phi_\epsilon^+)^{-1} \quad (\epsilon \leq 0). \quad (4.2.5)$$

Remarque 4.2.2. Pour $\epsilon > 0$, on peut définir une fonction de transition au-dessous du trou fondamental par

$$\Psi_\epsilon^L = T_{\alpha_-} \circ \Psi_\epsilon^U \circ T_{\alpha_+}, \quad (4.2.6)$$

voir figure 32. Bien qu'il soit commode de la définir, on note qu'elle est entièrement déterminée par Ψ_ϵ^U et donc redondante.

On discutera en détail les propriétés analytiques des fonctions de transition à la section 4.2.5, mais on mentionne immédiatement les deux propriétés les plus importantes.

D'abord, comme on le sait déjà, les fonctions de transition envoient les orbites de g_ε sur les orbites de g_ε . Ceci correspond au fait que Ψ_ε commute avec la translation par T_1 , c'est-à-dire qu'on a l'équation

$$\Psi_\varepsilon \circ T_1 = T_1 \circ \Psi_\varepsilon, \quad (4.2.7)$$

où Ψ_ε désigne $\Psi_\varepsilon^{0,\infty}$ ou $\Psi_\varepsilon^{L,U}$, selon la valeur de ε .

La seconde propriété est que les fonctions de transition envoient les orbites de f_ε sur les orbites de f_ε , ce qui se traduit par

$$\Psi_\varepsilon^0 \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi_\varepsilon^\infty \quad \text{pour } \varepsilon \leq 0; \quad (4.2.8)$$

$$\Psi_\varepsilon^L \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi_\varepsilon^U \quad \text{pour } \varepsilon > 0. \quad (4.2.9)$$

Ces propriétés proviennent du fait que les coordonnées de Fatou conjuguent f_ε et g_ε sur $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$ et T_1 respectivement. Les détails seront discutés à la section 4.2.5.

4.2.3. Géométrie des orbites pour $\varepsilon < 0$

On s'intéresse à comprendre les orbites de f_ε , mais comme f_ε possède une orbite périodique, il est également nécessaire de comprendre celles de $g_\varepsilon = f_\varepsilon \circ f_\varepsilon$. Pour décrire les orbites de g_ε , on aura bien sûr recours aux fonctions de transition et puisque certaines orbites tournent autour d'un point fixe, il est naturel de s'intéresser à l'application de premier retour.

4.2.3.1. Applications de premier retour. Afin de décrire les orbites, on tente de former un domaine fondamental. On considère une région C bornée par une courbe simple γ allant de $\sqrt{\varepsilon}$ à $-\sqrt{\varepsilon}$, contenue dans $D(0, r)$, et son image $g_\varepsilon(\gamma)$, comme sur la figure 34. On demande aussi que γ et $g_\varepsilon(\gamma)$ s'intersectent seulement en $\pm\sqrt{\varepsilon}$. On note que C inclut γ et $g_\varepsilon(\gamma)$. On appelle C un *croissant*.

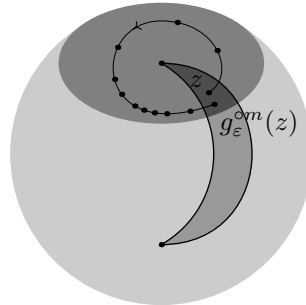


Figure 34. Premier retour dans un croissant de S^+ .

Soit $B = Z_\varepsilon^+(C)$ l'image de C dans la coordonnée temps U_ε^+ . Ce domaine est en forme de bande dans U_ε^+ , comme sur la figure 35. On note qu'il n'est pas essentiel que la bande soit

perpendiculaire à la ligne des trous, il suffit qu'elle lui soit transverse. Près de $\sqrt{\varepsilon}$, l'orbite de z s'enroule autour de $\sqrt{\varepsilon}$ dans le sens positif, donc les orbites ont plusieurs points dans C . On s'intéresse ainsi à décrire l'application de premier retour. Sur U_{ε}^+ , ce point est envoyé sur Z dans B et son orbite correspond à $\text{orb}(Z) = \{G_{\varepsilon}^{on}(Z)\}_n$. Il existe $m > 0$ tel que $g^{om}(z)$ sera revenue dans le croissant après avoir fait un tour de $\sqrt{\varepsilon}$, c'est-à-dire que $G^{om}(Z)$ se trouvera dans la bande $B + \alpha_+$. Ainsi, l'application de premier retour est $Z \mapsto G^{om}(Z) - \alpha_+$, ce qui donne pour les orbites $\text{orb}(Z) \mapsto \text{orb}(T_{-\alpha_+}(Z))$, où $T_{-\alpha_+}$ est la translation par $-\alpha_+$. Voir la figure 35a. Au niveau des orbites, l'application de premier sur la coordonnée temps est $T_{-\alpha_+} : U_{\varepsilon,1}^+ \rightarrow U_{\varepsilon,1}^+$.

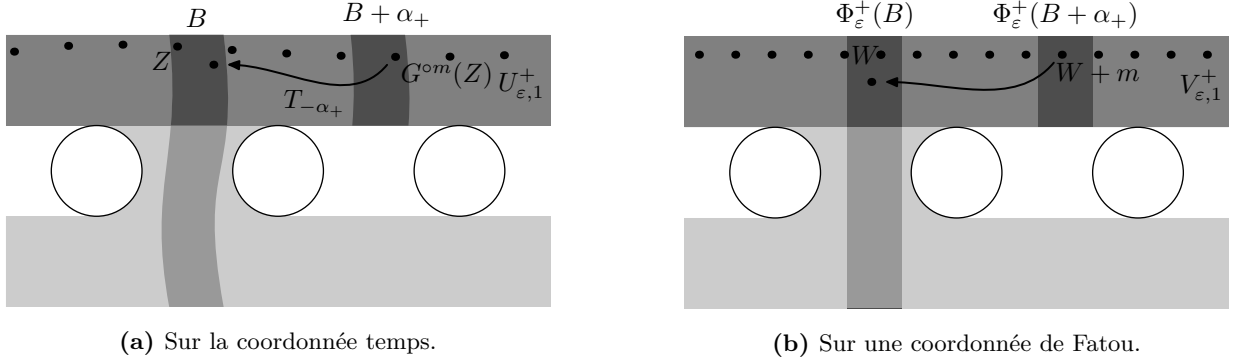


Figure 35. Application de premier retour.

Si l'on remplace g_{ε} par la forme normale v^1 , alors B est une bande verticale de largeur 1 et l'orbite de Z devient $\text{orb}(Z) = \{Z + n\}_n$. L'application de premier retour est $Z \mapsto Z + m - \alpha_+$, donc $T_{-\alpha_+} : U_{\varepsilon,1}^+ \rightarrow U_{\varepsilon,1}^+$ est l'application de premier retour sur les orbites de v^1 . Voir la figure 35b.

Pour le cas général, l'application se décrit également sur une coordonnée de Fatou $V_{\varepsilon,1}^+ = \Phi_{\varepsilon}^+(U_{\varepsilon,1}^+)$, où elle devient

$$\begin{aligned} W &\mapsto \Phi_{\varepsilon}^+ \left(G^{on} \left((\Phi_{\varepsilon}^+)^{-1}(W) \right) - \alpha_+ \right) \\ &= \Phi_{\varepsilon}^+ \left((\Phi_{\varepsilon}^+)^{-1}(W + n) - \alpha_+ \right). \end{aligned}$$

Au niveau des orbites, on obtient $\Phi_{\varepsilon}^+ \circ T_{-\alpha_+} \circ (\Phi_{\varepsilon}^+)^{-1} : V_{\varepsilon,1}^+ \rightarrow V_{\varepsilon,1}^+$.

On obtient de la même façon l'application de premier retour sur $U_{\varepsilon,1}^-$ et sur une coordonnée de Fatou $V_{\varepsilon,1}^- = \Phi_{\varepsilon}^-(U_{\varepsilon,1}^-)$.

L'application de premier retour associée à $-\sqrt{\varepsilon}$ se trouve de la même façon, mais on remarque que les orbites tournent dans le sens négatif et donc on trouve T_{α_-} .

Au niveau des orbites de g_{ε} , l'application de premier retour autour de $\pm\sqrt{\varepsilon}$ correspond à $\Phi_{\varepsilon}^+ \circ T_{\mp\alpha_{\pm}} \circ (\Phi_{\varepsilon}^+)^{-1}$. L'espace des orbites se décrit à l'aide des applications de premier retour comme suit. D'abord, pour chacun des croissants (par exemple, les deux croissants comme

sur la figure 36), on identifie les deux courbes de la frontière par $z \sim g_\varepsilon(z)$, ce qui donne deux sphères. Ensuite, on quotiente l'union disjointe de ces sphères par les deux applications de premier retour. Malheureusement, l'application de premier retour n'a pas de limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^-$. Ceci se voit géométriquement en observant qu'en $\varepsilon = 0$, la période α_\pm n'est pas définie et il n'y a plus d'orbites qui tournent autour d'un point fixe. On introduira donc une deuxième façon de décrire la dynamique en utilisant les transitions entre les deux croissants.

Pour cela, on introduit un dernier outil, l'*application de Lavaurs*, qui est la transition globale du croissant de gauche sur le croissant de droite (figure 33) et qui permet de décrire la dynamique de g_ε en terme de cette application et des fonctions de transition.

4.2.3.2. Application de Lavaurs. On rappelle qu'il y a le changement de carte $T_{-i\pi b}: U_{\varepsilon,1}^+ \rightarrow U_{\varepsilon,1}^-$ de l'équation (4.2.2). En composant l'application de premier retour de la forme normale et l'inverse du changement de carte, on obtient

$$T_{-\frac{i\pi}{\sqrt{\varepsilon}}} = T_{-\alpha_+} \circ (T_{-i\pi b})^{-1}: U_{\varepsilon,1}^- \longrightarrow U_{\varepsilon,1}^+.$$

Ce difféomorphisme correspond à l'application qui identifie l'orbite (pour la forme normale) de z dans $U_{\varepsilon,1}^-$ à son orbite dans $U_{\varepsilon,1}^+$, où l'orbite de z passe entre $\sqrt{\varepsilon}$ et $-\sqrt{\varepsilon}$, comme sur la figure 36.

Au niveau des orbites de g_ε , l'application de Lavaurs correspond à

$$T^L := \Phi_\varepsilon^+ \circ T_{-\frac{i\pi}{\sqrt{\varepsilon}}} \circ (\Phi_\varepsilon^-)^{-1} \quad (4.2.10)$$

ou de façon équivalente, elle correspond à la composition de l'application de premier de retour autour de $\sqrt{\varepsilon}$ de g_ε avec l'inverse de la fonction de transition de g_ε

$$T^L = \left(\Phi_\varepsilon^+ \circ T_{-\alpha_+} \circ (\Phi_\varepsilon^+)^{-1} \right) \circ (\Psi_\varepsilon^\infty)^{-1}. \quad (4.2.11)$$

Elle possède la même interprétation sur les orbites de g_ε que celle décrite ci-haut pour les orbites de v_ε^1 . Ceci permet d'étendre l'application de Lavaurs au reste du croissant en associant à chaque z du croissant de gauche le point qui tombe dans le croissant de droite en suivant l'orbite de z (voir figure 36).

Ainsi, T^L envoie les orbites de g_ε sur les orbites de g_ε ; elle possède la propriété qu'elle commute avec T_1

$$T^L \circ T_1 = T_1 \circ T^L.$$

4.2.3.3. Espace des orbites de g_ε . À l'aide des fonctions de transition et de l'application de Lavaurs, il est possible de décrire l'espace des orbites de g_ε et celui de f_ε . Soit Φ_ε^\pm des coordonnées de Fatou de f_ε . On pose $V_\varepsilon^\pm = \Phi_\varepsilon^\pm(U_\varepsilon^\pm)$ et $V_{\varepsilon,j}^\pm = \Phi_\varepsilon^\pm(U_{\varepsilon,j}^\pm)$. (On rappelle que $U_{\varepsilon,j}^\pm$ est défini à l'équation (4.2.1).)

On commence par g_ε . On considère deux bandes verticales de largeur 1 : B^+ dans V_ε^+ et B^- dans V_ε^- . Le recouvrement universel $E: W \mapsto w = \exp(-2i\pi W)$ de $V_\varepsilon^\pm \rightarrow \mathbb{C}^*$ induit un

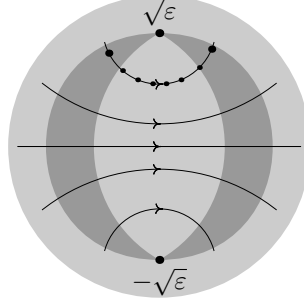


Figure 36. Point dans le croissant de gauche associé au point de son orbite du croissant de droite.

biholomorphisme entre B^\pm et \mathbb{C}^* . On considère ici \mathbb{C}^* comme étant une sphère de Riemann percée à l'origine et à l'infini.

Puisque les fonctions de transition $\Psi_\varepsilon^{0,\infty}$ et l'application de Lavaurs T^L commutent avec T_1 , le recouvrement universel induit des applications notées $\psi_\varepsilon^{0,\infty}$ et ℓ^L respectivement sur \mathbb{C}^* . Le recouvrement universel E envoie $V_{\varepsilon,1}^\pm$ (resp. $V_{\varepsilon,3}^\pm$) sur un voisinage de l'infini (resp. de l'origine); il suit que l'application ψ_ε^∞ (resp. ψ_ε^0) envoie un voisinage de l'infini (resp. de l'origine) sur un voisinage de l'infini (resp. de l'origine). On peut ainsi prolonger ψ_ε^∞ (resp. ψ_ε^0) en l'infini (resp. l'origine) par $\psi_\varepsilon^\infty(\infty) = \infty$ (resp. $\psi_\varepsilon^0(0) = 0$). D'une façon analogue, ℓ^L se prolonge à l'origine et à l'infini par $\ell^L(0) = 0$ et $\ell^L(\infty) = \infty$. Toutes ces applications sont illustrées sur la figure 37.

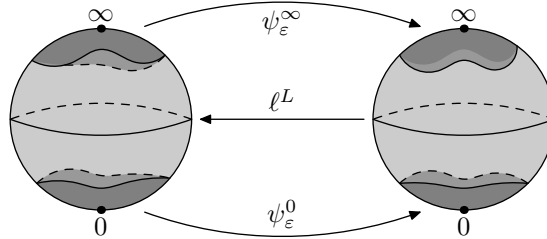


Figure 37. Fonctions de transition et application de Lavaurs sur les sphères.

Puisque $\ell^L: S^2 \rightarrow S^2$ est un difféomorphisme global de la sphère de Riemann, elle doit être une transformation de Möbius. Elle fixe également l'origine et l'infini, donc il suit que ℓ^L est une application linéaire. Ceci implique que l'application de Lavaurs est une translation, c'est-à-dire

$$T^L = \Phi_\varepsilon^+ \circ T_{\frac{-i\pi}{\sqrt{\varepsilon}}} \circ (\Phi_\varepsilon^-)^{-1} = T_C, \quad (4.2.12)$$

pour une constante $C \in \mathbb{C}$ qui dépend du choix des coordonnées de Fatou.

Notons par S_\pm^2 les deux sphères de Riemann correspondant aux bandes B^\pm . On regarde chaque point de chacune des sphères comme un représentant de son orbite. Puisque w et

$\ell^L(w)$ correspondent à la même orbite, on identifie ces points ensemble, donc on obtient $S_+^2 \sqcup S_-^2 / \ell^L$ qui est isomorphe à une seule sphère. Les composées $\psi_\varepsilon^\infty \circ \ell^T$ et $\psi_\varepsilon^0 \circ \ell^T$ correspondent aux applications de premier retour de $\sqrt{\varepsilon}$ et $-\sqrt{\varepsilon}$ respectivement. Ces applications commutent avec ℓ^T , donc elles induisent des applications sur la surface quotient $S_+^2 \sqcup S_-^2 / \ell^L$. Elles s'appliquent d'un voisinage de cette sphère à un voisinage de cette même sphère et elles agissent comme application de premier retour. Pour obtenir l'espace des orbites de g_ε , on identifie ensemble $[w]$ et $[\ell^L \circ \psi_\varepsilon^{0,\infty}([w])]$, où $[w] \in S_+^2 \sqcup S_-^2 / \ell^L$ et $[\ell^L \circ \psi_\varepsilon^{0,\infty}]$ est le difféomorphisme induit par l'application de premier de retour $\ell^L \circ \psi_\varepsilon^{0,\infty}$.

4.2.3.4. Espace des orbites de f_ε . Pour l'espace des orbites de f_ε , on observe que f_ε devient $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$ sur les coordonnées de Fatou. De plus, la translation de Lavaurs envoie les orbites de f_ε sur les orbites de f_ε , donc T_C commute avec $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$. On conclut que C est *réel*. Ensuite, par le revêtement universel, $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$ induit l'application

$$\tau \circ L_{-1} : w \mapsto -\frac{1}{\overline{w}} \quad (4.2.13)$$

sur les sphères S_\pm^2 du paragraphe précédent, où $\tau(w) = \frac{1}{\overline{w}}$. Cette application, qui représente f_ε , est bien définie sur l'espace des orbites de g_ε , car elle commute avec ℓ^L et elle est compatible avec les fonctions de transition de g_ε , c'est-à-dire

$$\psi_\varepsilon^\infty \circ \tau \circ L_{-1} = \tau \circ L_{-1} \circ \psi_\varepsilon^0,$$

obtenue en utilisant (4.2.8). Pour obtenir l'espace des orbites de f_ε , on identifie $[w]$ dans l'espace des orbites de g_ε avec $[\tau \circ L_{-1}([w])]$, où $[\tau \circ L_{-1}]$ est l'application induite par $\tau \circ L_{-1}$ sur l'espace des orbites de g_ε . Le surface quotient $S^2 / [\tau \circ L_{-1}]$ est l'espace projectif $\mathbb{R}P^2$. Voir la figure 38.

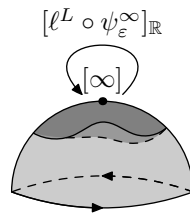


Figure 38. Espace des orbites de f_ε , où les flèches sur l'équateur indiquent la façon de recoller la frontière.

Puisque les $\ell^L \circ \psi_\varepsilon^{0,\infty}$ satisfont à

$$\ell^L \circ \psi_\varepsilon^0 \circ \tau \circ L_{-1} = \tau \circ L_{-1} \circ \ell^L \circ \psi_\varepsilon^\infty,$$

la paire $(\ell^L \circ \psi_\varepsilon^0, \ell^L \circ \psi_\varepsilon^\infty)$ induit une application, notée $[\ell^L \circ \psi_\varepsilon^\infty]_\mathbb{R}$ sur le voisinage de $[\infty]$ sur $\mathbb{R}P^2$. En particulier, on constate que l'application de premier retour dans le voisinage de l'infini est suffisante pour déterminer l'autre application de premier retour et vice versa.

4.2.4. Géométrie des orbites pour $\varepsilon > 0$

On s'intéresse maintenant à décrire les orbites de g_ε et de f_ε pour $\varepsilon > 0$. On note d'abord qu'un point z de l'espace de départ a plusieurs images dans U_ε^\pm qui correspondent à $\{Z + n\alpha_\pm\}_n$, donc l'orbite de $Z + \alpha_\pm$ est une répétition de l'orbite de Z . Puisque Φ_ε^\pm commute avec T_{α_\pm} , l'orbite de W se répète en $\{W + n\alpha_\pm + m\}_m$ pour chaque n .

On pose $V_\varepsilon^\pm = \Phi_\varepsilon^\pm(U_\varepsilon^\pm)$ et $V_{\varepsilon,U,L}^\pm = \Phi_\varepsilon^\pm(U_{\varepsilon,U,L}^\pm)$, où $U_{\varepsilon,U,L}^\pm$ a été défini à la section 4.2.1. Voir aussi la figure 31a au besoin.

Comme on le sait, la fonction de transition Ψ_ε^U envoie les orbites de f_ε (resp. g_ε) dans $V_{\varepsilon,U}^+$ sur les orbites de f_ε (resp. g_ε) dans $V_{\varepsilon,U}^-$. Ceci permet d'identifier ensemble la même orbite qui se retrouve dans les deux coordonnées $V_{\varepsilon,U}^+$ et $V_{\varepsilon,U}^-$. De plus, Ψ_ε^U commute avec T_1 et satisfait à

$$T_{\alpha_-} \circ \Psi_\varepsilon^U \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi_\varepsilon^U \circ T_{\alpha_+},$$

obtenue en combinant les équations (4.2.9) et (4.2.6).

À l'aide du revêtement universel $E: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*; W \mapsto w = \exp(-2i\pi W)$, on identifie une bande de largeur 1 de V_ε^\pm à \mathbb{C}_\pm^* . La fonction de transition induit une application ψ_ε^U définie sur un anneau centré à l'infini. Elle possède ainsi un développement en série de Laurent

$$\psi_\varepsilon^U(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^U(\varepsilon) w^n. \quad (4.2.14)$$

Voir la figure 39.

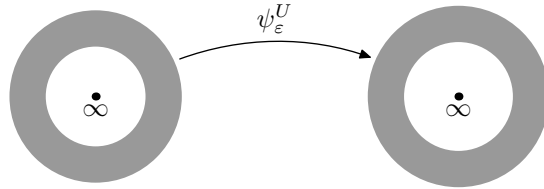


Figure 39. Fonction de transition d'un anneau $A \subset \mathbb{C}_+^*$ sur un anneau $A' \subset \mathbb{C}_-^*$.

Les orbites de g_ε se répètent selon la période (α_+ pour la bande dans V_ε^+ et α_- pour celle dans V_ε^-). La translation T_{α_\pm} induit une application linéaire L_\pm sur \mathbb{C}_\pm^* . On identifie $w \in \mathbb{C}_\pm^*$ à $L_\pm(w)$. On obtient ainsi deux tores complexes avec une fonction de transition entre les deux. Pour obtenir l'espace des orbites de g_ε , on identifie finalement w et $\psi_\varepsilon^U(w)$.

Ensuite, les translations T_{α_\pm} envoient les orbites de f_ε sur les orbites de f_ε dans les coordonnées de Fatou, comme on le voit par l'équation

$$\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ T_{\alpha_\pm} = T_{-\alpha_\pm} \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}.$$

De plus, l'équation (4.2.9) indique que les orbites de f_ε sont aussi compatibles avec la fonction de transition. Il suit que f_ε induit l'application $\tau \circ L_{-1}$ sur chacun des tores de l'espace des

orbites de g_ε . On obtient ainsi l'espace des orbites de f_ε en identifiant w avec $\tau \circ L_{-1}(w)$. Chaque tore devient une bouteille de Klein avec la fonction de transition ψ_ε^U entre les deux.

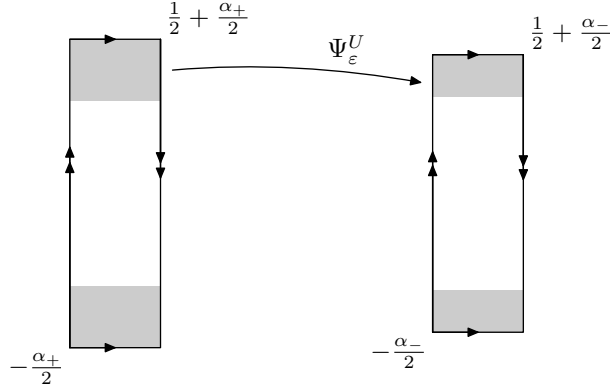


Figure 40. Bouteilles de Klein et fonction de transition.

Pour montrer cela, on remarque que l'on peut identifier le tore à un rectangle fondamental $[0, 1] \times [-\frac{\alpha_\pm}{2}, \frac{\alpha_\pm}{2}]$ dans la coordonnée de Fatou. Ensuite, par l'identification de $\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$, on obtient le rectangle fondamental $[0, \frac{1}{2}] \times [-\frac{\alpha_\pm}{2}, \frac{\alpha_\pm}{2}]$ avec les côtés identifiés comme sur la figure 40. Le domaine et l'image de la fonction de transition entre les deux bouteilles de Klein sont des rubans de Möbius.

4.2.5. Propriétés analytiques des fonctions de transition

Rappelons d'abord les propriétés connues des fonctions de transition.

Proposition 4.2.3. *Les fonctions de transition de f_ε commutent avec T_1 . Elles ont un développement en série de la forme, pour $\varepsilon \leq 0$*

$$\Psi_\varepsilon^0(W) = W + c_0^0(\varepsilon) + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n^0(\varepsilon) e^{2i\pi n W}; \quad (4.2.15)$$

$$\Psi_\varepsilon^\infty(W) = W + c_0^\infty(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^\infty(\varepsilon) e^{2i\pi n W};$$

et pour $\varepsilon > 0$

$$\Psi_\varepsilon^U(W) = W + c_0^U(\varepsilon) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^U(\varepsilon) e^{2i\pi n W}. \quad (4.2.16)$$

De plus, pour $\varepsilon \leq 0$, les termes constants satisfont à

$$c_0^0(\varepsilon) - c_0^\infty(\varepsilon) = 2i\pi b(\varepsilon). \quad (4.2.17)$$

Démonstration. Le fait que les fonctions de transition commutent avec T_1 découle de la relation (4.1.11) entre les coordonnées de Fatou et g_ε .

Les développements en série proviennent du fait que $\Psi - id$ est 1-périodique et se développe donc en série de Fourier. Il faut montrer que $c_n^\infty(\varepsilon) = 0$ pour $n < 0$ et $c_n^0(\varepsilon) = 0$ pour $n > 0$.

Pour ce faire, on remarque que lorsque $\Im W \rightarrow -\infty$ (resp. $\Im W \rightarrow +\infty$), on a que $|\Psi_\varepsilon^0(W) - W|$ (resp. $|\Psi_\varepsilon^\infty(W) - W|$) est bornée. En effet, sur l'espace des orbites de g_ε , Ψ_ε^0 (resp. Ψ_ε^∞) induit un germe de difféomorphisme $\psi_\varepsilon^0: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ (resp. $\psi_\varepsilon^\infty: (\mathbb{C}, \infty) \rightarrow (\mathbb{C}, \infty)$) et on a $\psi_\varepsilon^0(w) - w \rightarrow 0$ lorsque $w \rightarrow 0$ (resp. $\psi_\varepsilon^\infty(w) - w \rightarrow 0$ lorsque $w \rightarrow \infty$). Ainsi, pour que les développements en séries soient bornés pour ces limites, il est nécessaire que $c_n^0 = 0$ pour $n > 0$ et $c_n^\infty = 0$ pour $n < 0$.

Pour obtenir l'équation (4.2.17), rappelons que

$$T^L \circ \Psi_\varepsilon^\infty = \Phi_\varepsilon^+ \circ T_{-\alpha_+} \circ (\Phi_\varepsilon^+)^{-1},$$

$$T^L \circ \Psi_\varepsilon^0 = \Phi_\varepsilon^+ \circ T_{\alpha_-} \circ (\Phi_\varepsilon^+)^{-1},$$

où $T_{\pm\alpha_\pm}$ sont les applications de premier retour sur les coordonnées temps. On déjà montré que T^L était une translation par une constante C . Ainsi, en comparant les termes constants, on trouve

$$C + c_0^\infty = -\alpha_+,$$

$$C + c_0^0 = \alpha_-.$$

On a donc $c_0^0 - c_0^\infty = \alpha_- + \alpha_+ = 2i\pi b$, selon (4.1.3). \square

On présente maintenant les propriétés des fonctions de transition qui sont propres au cas antiholomorphe.

Proposition 4.2.4. *Les fonctions de transition de f_ε satisfont à*

$$\Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi_\varepsilon^\downarrow = \Psi_\varepsilon^\uparrow \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}, \quad (4.2.18)$$

où $\Psi_\varepsilon^\downarrow$ désigne Ψ_ε^0 ou Ψ_ε^L et $\Psi_\varepsilon^\uparrow$ désigne Ψ_ε^∞ ou Ψ_ε^U , selon la valeur de ε . Cette équation est équivalente aux relations suivantes entre les coefficients du développement (4.2.15) pour $\varepsilon \leq 0$

$$\overline{c_{-n}^0(\varepsilon)} = (-1)^n c_n^\infty(\varepsilon), \quad \text{pour } n \geq 0, \quad (4.2.19)$$

ou entre les coefficients de (4.2.16) pour $\varepsilon > 0$

$$\overline{c_{-n}^U(\varepsilon)} e^{-2i\pi n \alpha_+} = (-1)^n c_n^U(\varepsilon), \quad \text{pour } n > 0. \quad (4.2.20)$$

Enfin, pour $\varepsilon \leq 0$, le terme constant c_0^∞ satisfait à

$$\Im c_0^\infty(\varepsilon) = -i\pi b(\varepsilon). \quad (4.2.21)$$

et pour $\varepsilon > 0$, le terme constante c_0^U satisfait à

$$\Im c_0^U(\varepsilon) = -i\pi b(\varepsilon). \quad (4.2.22)$$

Démonstration. La relation (4.2.18) découle simplement de la relation (4.1.15) entre les coordonnées de Fatou et f_ε .

Pour obtenir les relations de (4.2.19), il suffit de développer Ψ^0 et Ψ^∞ en leur série respective dans l'équation (4.2.18), de comparer les coefficients des termes exponentiels $e^{2i\pi nW}$ entre eux et les termes constants entre eux.

Pour l'équation (4.2.21), il suffit de combiner l'équation (4.2.17) avec $\overline{c_0^0} = c_0^\infty$, obtenue de l'équation (4.2.18).

De façon analogue, pour obtenir les relations entre les coefficients de Ψ_ε^U , on combine d'abord les équations (4.2.6) et (4.2.18) qui donne

$$T_{\alpha_-} \circ \Psi^U \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi^U \circ T_{\alpha_+}.$$

Ensuite, on développe Ψ_ε^U en sa série de chaque côté de l'équation. On obtient le résultat pour $n > 0$ comme précédemment en comparant les coefficients des séries. On remarque qu'en comparant les termes constants, on trouve

$$c_0^U + \alpha_- = \overline{c_0^U} - \alpha_+.$$

Enfin, pour l'équation (4.2.22), on utilise le fait que $\alpha_+ + \alpha_- = 2i\pi b$, selon (4.1.3), dans l'équation précédente. \square

Selon l'équation (4.2.18), on voit que pour $\varepsilon \leq 0$, une seule fonction de transition est nécessaire, contrairement au cas holomorphe. Ainsi, dorénavant, on parlera seulement de Ψ_ε^∞ , sachant que Ψ_ε^0 est déterminée par l'équation (4.2.18).

Si on change les coordonnées de Fatou, on change les coefficients des développements en série des fonctions de transition. On peut choisir les coordonnées de Fatou pour modifier c_0^∞ et c_0^U .

Définition 4.2.5. On dira que la fonction de transition $\Psi_\varepsilon^\uparrow$ est normalisée lorsque

$$\begin{aligned} c_0^\infty(\varepsilon) &= -i\pi b(\varepsilon), & \varepsilon \leq 0; \\ c_0^U(\varepsilon) &= -i\pi b(\varepsilon), & \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

On termine la section en présentant un lien entre la translation de Lavaurs et la propriété d'être normalisée, lorsque $\varepsilon < 0$.

Lemme 4.2.6. La fonction de transition Ψ_ε^∞ est normalisée si et seulement si

$$T^L = T_{\frac{-i\pi}{\sqrt{\varepsilon}}}, \tag{4.2.23}$$

où la translation de Lavaurs T^L est définie par (4.2.10), si et seulement si

$$\Phi_\varepsilon^- = T_{\frac{i\pi}{\sqrt{\varepsilon}}} \circ \Phi_\varepsilon^+ \circ T_{\frac{-i\pi}{\sqrt{\varepsilon}}}. \tag{4.2.24}$$

Démonstration. On a

$$T^L \circ \Psi_\varepsilon^\infty = \Phi_\varepsilon^+ \circ T_{-\alpha_+} \circ (\Phi_\varepsilon^+)^{-1},$$

où la translation de Lavaurs est une translation par une constante C . On a donc la relation $C + c_\varepsilon^\infty = -\alpha_+$. Il s'ensuit que Ψ_ε^∞ est normalisée si et seulement si $C = -\frac{i\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$. On voit également que l'équation (4.2.24) est équivalente à $C = -\frac{i\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$ dans l'équation (4.2.10). \square

Remarque 4.2.7. L'équation (4.2.24) exprime une relation entre les coordonnées de Fatou sur U_ε^+ et sur U_ε^- . Même si Ψ_ε^∞ n'était pas normalisée, il existerait toujours une relation donnée par les translations de Lavaurs de g_ε et de la forme normale v^1

$$\Phi_\varepsilon^- = (T_{g_\varepsilon}^L)^{-1} \circ \Phi_\varepsilon^+ \circ T_{v^1}^L.$$

Ceci n'est pas très surprenant, car dans le disque $D(0, r)$ de la coordonnée z de départ, les « secteurs » S_ε^\pm qui ont été utilisées recouvrent chacun toutes les orbites de g_ε .

4.2.6. Définition du module de classification

On a mentionné que l'on pouvait changer les coordonnées de Fatou pour obtenir des fonctions de transition différentes. Selon l'unicité de la proposition 4.1.8, on peut remplacer Φ_ε^\pm par $T_{R_{\pm, \varepsilon}} \circ \Phi_\varepsilon^\pm$ dans la définition de Ψ_ε . La nouvelle fonction de transition Ψ'_ε qui en résulte satisfait alors à

$$\Psi'_\varepsilon = T_{R_{-, \varepsilon}} \circ \Psi_\varepsilon \circ T_{-R_{+, \varepsilon}}.$$

On s'intéresse à toutes les valeurs de ε , donc on considère les familles Ψ de fonctions de transition

$$\Psi(\varepsilon, W) = \begin{cases} \Psi_\varepsilon^\infty(W), & \text{si } \varepsilon \leq 0; \\ \Psi_\varepsilon^U(W), & \text{si } \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Dans le lemme suivant, on utilise un degré de liberté accordé par les coordonnées de Fatou pour obtenir une famille normalisée et régulière.

Lemme 4.2.8. *Il existe une famille Ψ normalisée pour chaque ε telle que Ψ est continue en ε et analytique en $\varepsilon \neq 0$. De plus, si Ψ' est une autre famille normalisée, alors il existe R_ε réelle telle que*

$$\Psi'_\varepsilon = T_{R_\varepsilon} \circ \Psi_\varepsilon \circ T_{-R_\varepsilon}.$$

Démonstration. Par la proposition 4.1.8, il existe Φ^\pm continue en (ε, Z) , holomorphe en Z et analytique en $\varepsilon \neq 0$. Ainsi, la fonction Ψ' qui en découle est elle-même aussi régulière en (ε, W) . En particulier, le coefficient constant (en W) $c_0(\varepsilon)$ de son développement (4.2.16) pour $\varepsilon > 0$ et (4.2.15) pour $\varepsilon \leq 0$ est continu en ε . Si on remplace Φ^- par $\tilde{\Phi}^-$, où $\tilde{\Phi}^-(\varepsilon, Z) = T_{-\Re c_0(\varepsilon)} \circ \Phi_\varepsilon^-(Z)$, alors la nouvelle famille Ψ est continue en ε , analytique en $\varepsilon \neq 0$ et est normalisée pour chaque ε .

La seconde partie du lemme découle de l'unicité des coordonnées de la proposition 4.1.8. \square

Il reste un degré de liberté. Comme toutes les fonctions de transition que l'on peut obtenir décrivent la même dynamique, on définit une relation d'équivalence pour les regrouper.

Soit Ψ_1 et Ψ_2 deux familles de fonctions de transition normalisées de f_ε continues en ε et analytiques en $\varepsilon \neq 0$. On définit la relation \sim par

$$\Psi_1 \sim \Psi_2 \iff \begin{cases} \exists R_\varepsilon \in \mathbb{R} \text{ analytique } \varepsilon \neq 0 \\ \text{et continue en } \varepsilon \text{ telle que} \\ \Psi_{1,\varepsilon} = T_{R_\varepsilon} \circ \Psi_{2,\varepsilon} \circ T_{-R_\varepsilon}. \end{cases} \quad (4.2.25)$$

On dénote la classe d'équivalence de Ψ par $[\Psi]$. Ceci forme l'invariant géométrique.

Définition 4.2.9. Soit f_0 un germe parabolique antiholomorphe de codimension 1 et soit f_ε une déformation générique à un paramètre réel de f_0 . Supposons que f_ε est sous forme préparée. Soit Ψ une famille de fonctions de transition de f_ε , continue en ε et analytique en $\varepsilon \neq 0$, définie sur la composante connexe au-dessus du trou fondamental. Le module de classification de f_ε est le triplet $(\varepsilon, b, [\Psi])$, où ε est le paramètre canonique (équation (3.2.4)) de f_ε , b est l'invariant formel défini à (3.2.5) et $[\Psi]$ est une classe d'équivalence de familles de fonctions de transition normalisées sous la relation d'équivalence \sim définie à (4.2.25).

Remarque 4.2.10. Lorsque le paramètre de f_ε est le paramètre canonique, connaître Ψ donne automatiquement l'invariant formel b et donc la forme normale de f_ε .

Soit f_0 un germe antiholomorphe parabolique de codimension 1. Le but ultime de cette section est d'obtenir l'équivalence, au sens de la définition 3.2.2, entre deux déformations de f_0 lorsqu'elles ont le même module de classification. On appellera l'équivalence de la définition 3.2.2 l'*équivalence forte*. On utilisera l'*équivalence faible*, introduite dans la définition suivante, de façon intermédiaire.

4.2.7. Équivalence faible

Pour définir l'équivalence faible, on atténue la condition d'analyticité en ε en demandant plutôt l'analyticité pour $\varepsilon \neq 0$. À noter qu'on demande tout de même la continuité en (ε, z) (même en $\varepsilon = 0$).

Définition 4.2.11. Soit $f_{1,\varepsilon}$ et $f_{2,\eta}$ deux déformations (holomorphes ou antiholomorphes) à un paramètre réel. Elles sont dites faiblement équivalentes s'il existe deux nombres $r, r' > 0$ et un difféomorphisme (sur son image)

$$\begin{aligned} H: (-r', r') \times D(0, r) &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C} \\ (\varepsilon, z) &\mapsto (\beta(\varepsilon), h_\varepsilon(z)) \end{aligned}$$

tels que

1. $\beta(0) = 0$;
2. $H(\varepsilon, \cdot)$ est holomorphe en z et $H(\cdot, z)$ est analytique pour $\varepsilon \neq 0$;
3. H est continue en (ε, z) ;
4. $f_{2,\beta(\varepsilon)} = h_\varepsilon \circ f_{1,\varepsilon} \circ h_\varepsilon^{-1}$.

Théorème 4.2.12. *Soit $f_{1,\varepsilon}$ et $f_{2,\varepsilon}$ deux déformations génériques sous forme préparée de f_0 un germe antiholomorphe parabolique de codimension 1. Alors $f_{1,\varepsilon}$ et $f_{2,\varepsilon}$ ont le même module de classification si et seulement si elles sont faiblement équivalentes.*

Démonstration. On omet l'indice ε de $f_{j,\varepsilon}$ pour alléger. Supposons d'abord que f_1 et f_2 sont faiblement équivalentes. Soit h_ε un difféomorphisme qui conjugue f_1 sur f_2 . Soit H_ε^\pm le relèvement de h_ε dans la coordonnée temps. Soit Φ_ε^\pm une coordonnée de Fatou de f_2 . Alors $\Phi_\varepsilon^\pm \circ H_\varepsilon^\pm$ est une coordonnée de Fatou de f_1 . En effet, on a

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon^\pm \circ H_\varepsilon^\pm \circ F_1 \circ (H_\varepsilon^\pm)^{-1} \circ (\Phi_\varepsilon^\pm)^{-1} &= \Phi_\varepsilon^\pm \circ F_2 \circ (\Phi_\varepsilon^\pm)^{-1} \\ &= \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ainsi, les fonctions de transition Ψ_{F_j} de f_j sont égales, puisqu'on a

$$\begin{aligned} \Psi_{F_1} &= (\Phi_\varepsilon^- \circ H_\varepsilon^-) \circ T_{-i\pi b} \circ ((H_\varepsilon^+)^{-1} \circ (\Phi_\varepsilon^+)^{-1}) \\ &\stackrel{(*)}{=} \Phi_\varepsilon^- \circ T_{-i\pi b} \circ (\Phi_\varepsilon^+)^{-1} \\ &= \Psi_{F_2}, \end{aligned}$$

où il reste l'égalité $(*)$ à montrer, c'est-à-dire $H_\varepsilon^- \circ T_{-i\pi b} \circ (H_\varepsilon^+)^{-1} = T_{-i\pi b}$. Pour $\varepsilon \geq 0$, ceci découle de la formule (4.2.2) du changement de carte $T_{-i\pi b} = Z_\varepsilon^+ \circ (Z_\varepsilon^-)^{-1} : U_{\varepsilon,U}^+ \rightarrow U_{\varepsilon,U}^-$. Pour $\varepsilon < 0$, on a la relation

$$T_{\frac{-i\pi}{\sqrt{\varepsilon}}} \circ H_\varepsilon^- = H_\varepsilon^+ \circ T_{\frac{-i\pi}{\sqrt{\varepsilon}}},$$

grâce à la translation de Lavaurs de la forme normale $T_{\frac{-i\pi}{\sqrt{\varepsilon}}} : U_\varepsilon^- \rightarrow U_\varepsilon^+$. Puisque H_ε^\pm commute aussi avec T_{α_+} et T_{α_-} sur $U_{\varepsilon,1}^\pm$, la conclusion suit.

On montre maintenant que f_1 et f_2 sont faiblement équivalentes si elles ont le même module, disons $(\varepsilon, b, [\Psi])$. Soit Ψ un représentant de la classe $[\Psi]$. Soit Φ_j^\pm une famille de coordonnées de Fatou de f_j telle que

$$\Psi(\varepsilon, W) = \Psi_\varepsilon(W) = \Phi_{j,\varepsilon}^- \circ T_{-i\pi b} \circ (\Phi_{j,\varepsilon}^+)^{-1}(W),$$

où $\Phi_{j,\varepsilon}^\pm(Z) = \Phi_j^\pm(\varepsilon, Z)$. Pour la suite, on écrira simplement Φ_j^\pm pour $\Phi_{j,\varepsilon}^\pm$.

On utilise les coordonnées de Fatou pour définir une conjugaison h_ε entre f_1 et f_2 . On pose

$$h_\varepsilon = \begin{cases} (Z_\varepsilon^+)^{-1} \circ (\Phi_2^+)^{-1} \circ \Phi_1^+ \circ Z_\varepsilon^+, & \text{si } z \in S_\varepsilon^+; \\ (Z_\varepsilon^-)^{-1} \circ (\Phi_2^-)^{-1} \circ \Phi_1^- \circ Z_\varepsilon^-, & \text{si } z \in S_\varepsilon^-. \end{cases} \quad (4.2.26)$$

L'hypothèse que ces deux déformations ont le même module permettra de conclure que h_ε est bien définie et uniforme sur le domaine. En supposant que h_ε est bien définie, on voit que c'est une conjugaison par

$$\begin{aligned} h_\varepsilon \circ f_1 \circ h_\varepsilon^{-1} &= (Z_\varepsilon^\pm)^{-1} \circ (\Phi_2^\pm)^{-1} \circ \Phi_1^\pm \circ Z_\varepsilon^\pm \circ f_1 \circ (Z_\varepsilon^\pm)^{-1} \circ (\Phi_1^\pm)^{-1} \circ \Phi_2^\pm \circ Z_\varepsilon^\pm \\ &= (Z_\varepsilon^\pm)^{-1} \circ (\Phi_2^\pm)^{-1} \circ \Phi_1^\pm \circ F_1 \circ (\Phi_1^\pm)^{-1} \circ \Phi_2^\pm \circ Z_\varepsilon^\pm \\ &= (Z_\varepsilon^\pm)^{-1} \circ (\Phi_2^\pm)^{-1} \circ T_1 \circ \Phi_2^\pm \circ Z_\varepsilon^\pm \\ &= (Z_\varepsilon^\pm)^{-1} \circ F_2 \circ Z_\varepsilon^\pm \\ &= f_2. \end{aligned}$$

On montre séparément que h_ε est bien définie pour $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 0$ et $\varepsilon = 0$ puisque ces cas présentent des subtilités géométriques différentes.

Le cas $\varepsilon = 0$ a déjà été fait au chapitre 2.

Dans le cas $\varepsilon > 0$, les coordonnées de Fatou Φ_ε^\pm sur U_ε^\pm commutent avec T_{α_\pm} . Les composées $(\Phi_2^\pm) \circ \Phi_1^\pm$ induisent ainsi des fonctions uniformes h_ε^\pm sur S_ε^\pm . Sur l'intersection $z \in S_\varepsilon^+ \cap S_\varepsilon^-$, on a

$$\begin{aligned} h_\varepsilon^- \circ (h_\varepsilon^+)^{-1} &= \left((Z_\varepsilon^-)^{-1} \circ (\Phi_{2,\varepsilon}^-)^{-1} \circ \Phi_{1,\varepsilon}^- \circ Z_\varepsilon^- \right) \\ &\quad \circ \left((Z_\varepsilon^+)^{-1} \circ (\Phi_{1,\varepsilon}^+)^{-1} \circ \Phi_{2,\varepsilon}^+ \circ Z_\varepsilon^+ \right) \\ &= (Z_\varepsilon^-)^{-1} \circ (\Phi_{2,\varepsilon}^-)^{-1} \circ \Psi_\varepsilon^U \circ \Phi_{2,\varepsilon}^+ \circ Z_\varepsilon^+ \\ &= (Z_\varepsilon^-)^{-1} \circ T_{-i\pi b} \circ Z_\varepsilon^+ \\ &= id. \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

On retrouve ainsi h_ε par

$$h_\varepsilon(z) = \begin{cases} h_\varepsilon^+(z), & \text{si } z \in S_\varepsilon^+; \\ h_\varepsilon^-(z), & \text{si } z \in S_\varepsilon^-; \end{cases}$$

qui est bien définie.

Pour le cas $\varepsilon < 0$, on restreint S_ε^\pm à des domaines simplement connexes R_ε^\pm de $D_\varepsilon^* := D(0, r) \setminus \{\pm\sqrt{\varepsilon}\}$ de sorte que $D_\varepsilon^* = R_\varepsilon^+ \cup R_\varepsilon^-$, comme sur la figure 41. On peut définir h_ε^\pm sur R_ε^\pm comme dans le cas $\varepsilon > 0$, car $Z_\varepsilon^\pm|_{R_\varepsilon^\pm}$ est un difféomorphisme. Il ne reste qu'à montrer que $h_\varepsilon^+ = h_\varepsilon^-$ sur $R_\varepsilon^+ \cap R_\varepsilon^-$ et que la fonction h_ε ainsi obtenue se prolonge en $\sqrt{\varepsilon}$ et en $-\sqrt{\varepsilon}$.

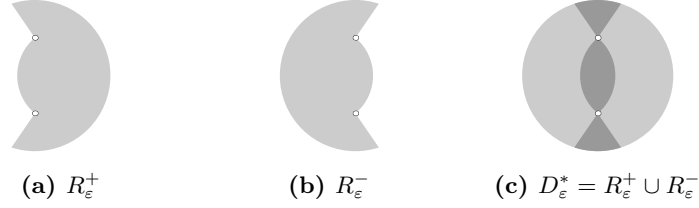


Figure 41. Séparation de D_ε^* en deux domaines simplement connexes.

L'intersection des domaines R_ε^\pm est formée de trois composantes connexes : I^+ au-dessus de $\sqrt{\varepsilon}$, I^L entre $\sqrt{\varepsilon}$ et $-\sqrt{\varepsilon}$ et I^- au-dessous de $-\sqrt{\varepsilon}$. Voir la figure 41c.

Sur I^+ , on montre que $h_\varepsilon^+ = h_\varepsilon^-$ par les mêmes calculs qu'à la ligne (4.2.27), où Ψ_ε^U est remplacée par Ψ_ε^∞ . Pour I^- , les calculs sont analogues, mais l'on remplace $T_{-i\pi b}$ par $T_{i\pi b}$ et Ψ_ε^U par Ψ_ε^0 .

Pour le dernier domaine I^L , $Z_\varepsilon^+ \circ (Z_\varepsilon^-)^{-1}$ correspond à la translation de Lavaurs. On utilise le fait que $f_{\varepsilon,1}$ et $f_{\varepsilon,2}$ ont la même forme normale et donc la même translation de Lavaurs. De plus, puisque Ψ_ε^∞ est normalisée, la translation de Lavaurs est $T_{-\frac{i\pi}{\sqrt{\varepsilon}}}$. On a

$$\begin{aligned}
& h_\varepsilon^- \circ (h_\varepsilon^+)^{-1} \\
&= \left((Z_\varepsilon^-)^{-1} \circ (\Phi_{2,\varepsilon}^-)^{-1} \circ \Phi_{1,\varepsilon}^- \circ Z_\varepsilon^- \right) \\
&\quad \circ \left((Z_\varepsilon^+)^{-1} \circ (\Phi_{1,\varepsilon}^+)^{-1} \circ \Phi_{2,\varepsilon}^+ \circ Z_\varepsilon^+ \right) \\
&= (Z_\varepsilon^-)^{-1} \circ (\Phi_{2,\varepsilon}^-)^{-1} \circ \Phi_{1,\varepsilon}^- \circ T_{\frac{i\pi}{\sqrt{\varepsilon}}} \circ (\Phi_{1,\varepsilon}^+)^{-1} \circ \Phi_{2,\varepsilon}^+ \circ Z_\varepsilon^+ \quad (4.2.28) \\
&= (Z_\varepsilon^-)^{-1} \circ (\Phi_{2,\varepsilon}^-)^{-1} \circ T_{\frac{i\pi}{\sqrt{\varepsilon}}} \circ \Phi_{2,\varepsilon}^+ \circ Z_\varepsilon^+ \\
&= (Z_\varepsilon^-)^{-1} \circ T_{\frac{i\pi}{\sqrt{\varepsilon}}} \circ Z_\varepsilon^+ \\
&= id.
\end{aligned}$$

La fonction h_ε donnée par (4.2.26) est donc bien définie sur $D(0, r) \setminus \{\pm\sqrt{\varepsilon}\}$ et se prolonge sur $D(0, r)$ par $h_\varepsilon(\pm\sqrt{\varepsilon}) = \pm\sqrt{\varepsilon}$, puisqu'elle est bornée près de $\pm\sqrt{\varepsilon}$. \square

Chapitre 5

Équivalence forte

Le but de ce chapitre est de démontrer que l'équivalence faible implique l'équivalence forte. On entend par *équivalence forte* la même définition que l'équivalence faible, mais en demandant que le changement de coordonnée soit réel analytique partout en le paramètre, plutôt que réel analytique sur le complément de 0 et continu en 0. Un énoncé rigoureux sera donné à la définition 5.1.1, mais on remarque qu'il s'agit de la définition 3.2.2 avec un seul paramètre réel.

L'équivalence forte pour le cas holomorphe a été démontrée dans l'addendum de [14]. Ceci est un bon indicateur qu'il est possible d'obtenir l'équivalence forte dans le cas antiholomorphe. Il sera nécessaire de complexifier le paramètre canonique afin d'adapter les techniques utilisées dans le cas holomorphe. En effet, dans le cas holomorphe, on traite des familles à un paramètre complexe. Pour une déformation générique d'un germe holomorphe parabolique de codimension 1, on peut trouver deux familles de coordonnées de Fatou sur un secteur, dont l'ouverture est plus grande que 2π , qui ne se recollent pas sur l'auto-intersection du secteur. Ceci permet tout de même de trouver une famille de conjugaison uniforme en le paramètre lorsque deux déformations de germes paraboliques holomorphes ont le même module de classification. Cette démarche fonctionne pour le cas antiholomorphe, mais il faut préciser comment trouver une famille de coordonnées de Fatou pour les valeurs complexes du paramètre.

On présentera dans ce chapitre les coordonnées de Fatou du point de vue de Lavaurs pour le cas holomorphe et comment en trouver pour le cas antiholomorphe. Ensuite, on démontrera l'équivalence forte.

5.1. Complexification du paramètre

Pour la section, on considère f_ε une déformation générique d'un germe f_0 antiholomorphe parabolique de codimension 1. On rappelle la définition de l'équivalence forte.

Définition 5.1.1. Soit $f_{1,\varepsilon}$ et $f_{2,\eta}$ deux déformations génériques de f_0 , un germe parabolique antiholomorphe de codimension 1. Elles sont fortement équivalentes s'il existe un disque $D(0, r)$, un intervalle $(-r', r')$, avec $r, r' > 0$, et un difféomorphisme (sur son image) analytique mixte $H: (-r', r') \times D(0, r) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ donné par

$$H(\varepsilon, z) = (\beta(\varepsilon), h_\varepsilon(z))$$

tel que $\beta(0) = 0$ et $f_{2,\beta(\varepsilon)} = h_\varepsilon \circ f_{1,\varepsilon} \circ h_\varepsilon$.

On rappelle également que si deux déformations sont fortement (ou faiblement) équivalentes, alors elles ont le même paramètre canonique. Il est bien plus facile alors de comparer leur forme préparée respective, puisqu'on peut remplacer ε et η dans la définition par le même paramètre canonique. En particulier, on a $\beta = id$. Pour la suite, on se concentre sur les déformations génériques sous forme préparée.

On pose $g_\varepsilon = f_\varepsilon \circ f_\varepsilon$. Ceci détermine une déformation holomorphe générique de g_0 pour les valeurs réelles de ε . Étant donné que g_ε est réelle analytique en ε , il est possible d'étendre g_ε sur les valeurs complexes de ε dans un voisinage de l'origine.

Au niveau formel, l'existence de f_ε assure que l'invariant formel b commute avec la conjugaison complexe, car $b(\varepsilon)$ est réel pour ε réel. Dans ce cas, la forme normale satisfait à

$$\overline{v_\varepsilon^1(z)} = v_{\bar{\varepsilon}}^1(\bar{z}),$$

car le champ de vecteurs $v_\varepsilon(z) = \dot{z} = \frac{z^2 - \varepsilon}{1 + b(\varepsilon)z}$ satisfait à $\overline{v_\varepsilon(z)} = v_{\bar{\varepsilon}}(\bar{z})$. On peut réexprimer la relation par

$$\sigma \circ v_\varepsilon^1 \circ \sigma = v_{\bar{\varepsilon}}^1.$$

De ce point de vue, on voit que la dynamique de v_ε^1 et la dynamique de $v_{\bar{\varepsilon}}^1$ sont dépendantes ; le portrait de phase de $v_{\bar{\varepsilon}}$ est la réflexion du portrait de phase de v_ε par rapport à l'axe réel lorsque $\varepsilon \notin \mathbb{R}$. En particulier, la déformation est complètement déterminée par les valeurs de ε dans un demi-disque contenu dans $\Im \varepsilon \geq 0$.

Au niveau de la coordonnée temps, on a

$$\overline{Z(\varepsilon, z)} = \overline{\int_{\gamma_z} \frac{1 + b(\varepsilon)\zeta}{\zeta^2 - \varepsilon} d\zeta} = \int_{\bar{\gamma}_z} \frac{1 + b(\bar{\varepsilon})\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}^2 - \bar{\varepsilon}} d\bar{\zeta} = \int_{\bar{\gamma}_z} \frac{1 + b(\bar{\varepsilon})\zeta}{\zeta^2 - \bar{\varepsilon}} d\zeta = Z(\bar{\varepsilon}, \bar{z}).$$

Ceci permet de prolonger Σ aux valeurs complexes de ε sur les U_ε^\pm que l'on définira ci-dessous

$$\Sigma := Z_{\bar{\varepsilon}} \circ \sigma \circ Z_\varepsilon^{-1}: U_\varepsilon^\pm \rightarrow U_{\bar{\varepsilon}}^\pm. \quad (5.1.1)$$

On prolonge également f_ε aux valeurs complexes de ε , mais on la prolonge de sorte à ce que f_ε soit antiholomorphe en ε . On ne s'intéresse pas comme tel à la dynamique de f_ε pour les valeurs non réelles de ε , mais la complexification de ε permet de prolonger la relation entre f_ε et g_ε de la façon suivante.

Proposition 5.1.2. *On a*

$$g_\varepsilon = f_{\bar{\varepsilon}} \circ f_\varepsilon. \quad (5.1.2)$$

Démonstration. On remarque que $f_{\bar{\varepsilon}} \circ \sigma$ et $\sigma \circ f_\varepsilon$ sont deux germes holomorphes. On a l'égalité

$$g_\varepsilon(z) = f_{\bar{\varepsilon}} \circ \sigma \circ \sigma \circ f_\varepsilon(z)$$

pour $(\varepsilon, z) \in (-r', r') \times D(0, r) \subset \mathbb{C}^2$. Par le principe d'identité, pour chaque z fixé, l'égalité reste vraie pour ε sur $D(0, r')$. On conclut que la relation tient pour (ε, z) sur $D(0, r') \times D(0, r)$. \square

On obtient comme conséquence immédiate que la dynamique de g_ε et celle de $g_{\bar{\varepsilon}}$ sont dépendantes.

Corollaire 5.1.3. *Si $g_\varepsilon = f_{\bar{\varepsilon}} \circ f_\varepsilon$, alors g_ε et $\sigma \circ g_{\bar{\varepsilon}} \circ \sigma$ sont fortement équivalentes.*

Démonstration. Il suffit de prendre la conjugaison $h_\varepsilon = \sigma \circ f_\varepsilon$. \square

5.2. Coordonnées de Fatou du point de vue de Lavaurs

Dans le cas de $\varepsilon < 0$, pour décrire les orbites de f_ε et de g_ε , on a eu recours aux applications de premier retour autour de $\pm\sqrt{\varepsilon}$, qui se décomposent chacune en la composition d'une fonction de transition avec l'application de Lavaurs. L'application de premier retour et sa décomposition permettent de décrire les dynamiques de f_ε et de g_ε d'une façon naturelle en raison de la nature des orbites de g_ε dans un voisinage des points fixes, où les orbites tournent autour d'un des deux points fixes. C'est ce que l'on appelle le *point de vue de Lavaurs*.

Pour les autres valeurs complexes de ε , il est encore possible d'adopter ce point de vue. Comme ce ne sont pas pour toutes les valeurs de ε qu'il y a des orbites de g_ε qui tournent autour d'un des points fixes, pour obtenir une application de premier retour il faudra prendre un domaine fondamental qui spirale autour des points fixes. Voir la figure 42, où un domaine fondamental en spirale est illustré pour $\varepsilon > 0$.

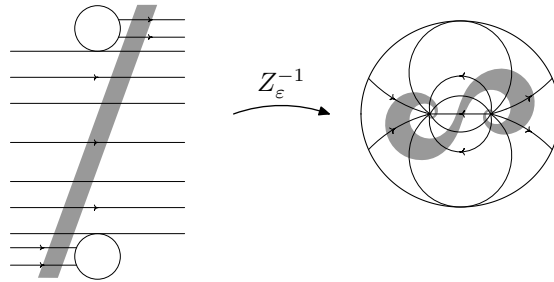


Figure 42. Bande oblique dans la coordonnée temps et son image en spirale dans la coordonnée z de départ pour $\varepsilon > 0$.

5.2.1. Position des trous dans la coordonnée temps

On rappelle que la coordonnée temps est parsemée de trous qui correspondent à l'extérieur du disque $D(0, r)$ que l'on ignore (voir la section 4.1.1.1). Les trous se répètent suivant la période

$$\alpha_{\pm} = \pm \frac{i\pi}{\sqrt{\varepsilon}} + i\pi b(\varepsilon),$$

ils sont donc alignés dans cette direction. Ici, α_+ est la période de la branche Z_{ε}^+ et α_- , celle de la branche Z_{ε}^- (voir la section 4.1.1.2). On voit que plus $|\varepsilon|$ est petit, plus les trous sont loin les uns des autres. Maintenant que ε est complexe, la ligne des trous formera un angle avec l'horizontal donné par

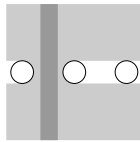
$$\begin{aligned} \arg \alpha_{\pm} &= \Im \log \left(\pm \frac{i\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \left(1 \pm i\pi b(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} \right) \right) \\ &= \left(\pi \mp \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \arg \varepsilon + \arg \left(1 \pm b(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

La contribution que $\arg \left(1 \pm b(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} \right)$ apporte à $\arg \alpha_{\pm}$ est négligeable, puisque $1 \pm b(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon}$ est très près de 1 pour ε assez petit, c'est-à-dire que $\arg(1 \pm b(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon}) \approx 0$.

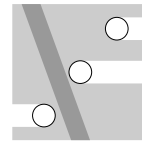
On note que l'expression de $\arg \alpha_{\pm}$ permet de voir que lorsque $\arg \varepsilon$ augmente, les trous tournent dans le sens horaire.

5.2.2. Domaines de translation

La construction des coordonnées de Fatou, qui est effectuée pour $\varepsilon < 0$ à la section 4.1.3, se généralise pour les autres valeurs complexes de ε . Rappelons que la construction consiste à prendre une bande verticale passant entre deux trous dans la coordonnée temps, voir la figure 43a, afin de construire une application quasiconforme et une correction qui, composées ensemble, donnent une coordonnée de Fatou. À noter qu'il n'est pas essentiel que la bande soit perpendiculaire à la ligne des trous, il suffit qu'elle lui soit transverse. Lorsque ε varie, les trous dans la coordonnées temps tournent, donc l'idée est de faire pencher la bande verticale utilisée dans la construction. Voir la figure 43b.



(a) Domaine de translation pour ε réel négatif.



(b) Domaine de translation pour ε non réel.

Figure 43. Domaines de translation.

On commence par décrire la forme des domaines des coordonnées de Fatou pour le point de vue de Lavaurs. Comme pour le cas de ε réel, on commence par une droite ℓ bien choisie. On dira que ℓ est *admissible* si

1. ℓ est à une distance entre 2 et 3 du trou fondamental et une distance plus grande que 2 des autres trous ;
2. ℓ est transverse à la ligne des trous ;
3. ℓ et $G_\varepsilon(\ell)$ ne s'intersectent pas.

Pour respecter ces conditions, ℓ doit passer entre le trou fondamental et un autre trou. Pour respecter le point 3, ℓ ne doit pas être trop près de l'horizontale (voir la figure 44b). Les angles maximaux permis pour la pente de ℓ dépendent de r et de r' comme suit, où on rappelle que r et r' sont les rayons du bi-disque $D(0, r') \times D(0, r)$ du domaine d'un représentant du germe f_ε . Au lemme 4.1.2, on a montré que

$$|G_\varepsilon - T_1| \leq 2C_F \max\{r, r'\},$$

pour une constante C_F . Plus la borne $2C_F \max\{r, r'\}$ est petite, plus G_ε est près de la translation par 1, donc plus la pente de ℓ peut s'approcher de 0. Sur les figures 44a, 44b et 44c, la bande grise est une zone interdite : si ℓ ne touche pas à cette bande, alors on sera assuré que ℓ et $G_\varepsilon(\ell)$ sont disjoints. La largeur de la bande correspond à $4C_F \max\{r, r'\}$. L'annexe A contient plus de détails sur l'angle maximal, mais il est préférable de lire la section 5.2.4.1 avant de consulter l'annexe.

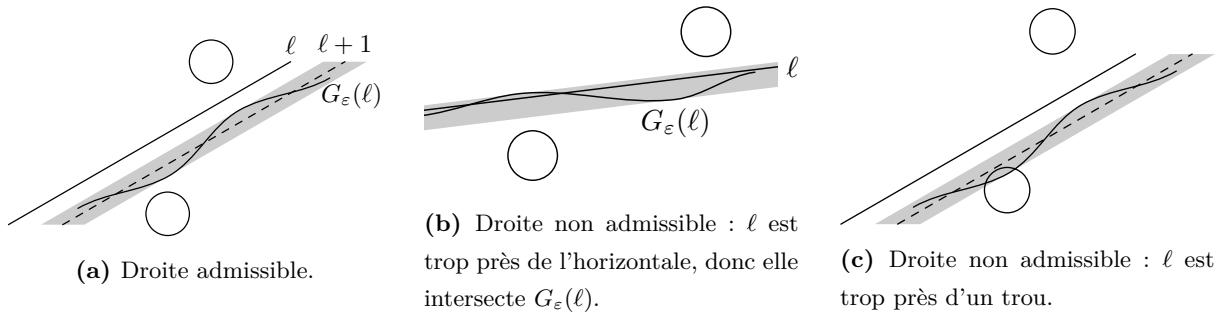


Figure 44. Exemples d'une droite admissible et de deux droites non admissibles.

Pour chaque valeur de ε , après avoir choisi une droite admissible ℓ , on construit le domaine de translation, que l'on appelle *domaine de translation de Lavaurs*, de la même façon qu'auparavant : on pose

$$U_\varepsilon^L := \{Z \mid \exists n \in \mathbb{Z}, G_\varepsilon^{on}(Z) \in B_\ell\}, \quad (5.2.1)$$

où B_ℓ est la région fermée comprise entre ℓ et $G_\varepsilon(\ell)$. Ainsi, si r et r' sont assez petits, alors pour chaque ε , il est possible de construire un domaine de translation de Lavaurs de chaque côté du trou fondamental.

5.2.3. Existence et unicité des coordonnées de Fatou du point de vue de Lavaurs pour le cas holomorphe

Théorème 5.2.1 ([14]). *Soit g_ε une déformation générique sous forme préparée à un paramètre complexe d'un germe g_0 holomorphe parabolique de codimension 1. Soit $\varepsilon \in D(0, r')$ fixé.*

1. *(Existence) Pour chaque domaine de translation de Lavaurs U_ε^L , il existe un difféomorphisme Φ_ε^L défini sur U_ε^L tel que*

$$\Phi_\varepsilon^L \circ G_\varepsilon \circ (\Phi_\varepsilon^L)^{-1} = T_1. \quad (5.2.2)$$

2. *(Unicité) Si $\tilde{\Phi}_\varepsilon^L$ est une autre coordonnée de Fatou sur U_ε^L , alors il existe une constante $C_\varepsilon \in \mathbb{C}$ telle que*

$$\Phi_\varepsilon^L \circ (\tilde{\Phi}_\varepsilon^L)^{-1} = T_{C_\varepsilon}.$$

On ne fera pas la démonstration, mais les détails se trouvent dans [14]. La preuve est la même que celle présentée à la section 4.1.3.

Remarque 5.2.2. Les coordonnées de Fatou sont naturellement définies sur U_ε^L du fait de leur équation fonctionnelle

$$\Phi_\varepsilon^L \circ G_\varepsilon \circ (\Phi_\varepsilon^L)^{-1} = T_1.$$

C'est aussi la raison pour laquelle on nomme U_ε^L un domaine de translation.

5.2.4. Dépendance du paramètre d'une famille de coordonnées de Fatou du point de vue de Lavaurs

Malheureusement, la construction des domaines de translation présentée ne permet pas d'obtenir une famille continue en ε . Avant d'énoncer le théorème sur la dépendance du paramètre, on présente l'obstruction que l'on rencontre.

5.2.4.1. Le problème de discontinuité. Si l'on veut choisir une famille $\{U_\varepsilon^L\}_{\varepsilon \in D(0, r')}$ de domaines de translation de *Lavaurs* de façon continue, on se rend compte qu'il y a un problème d'incompatibilité dans le choix du domaine lorsque l'on fait le tour de $\varepsilon = 0$.

En partant de $\arg \varepsilon = \pi$ et d'une droite admissible ℓ_ε verticale, on laisse tourner ε autour de 0 dans le sens horaire. Les trous dans la coordonnée temps tournent dans le sens antihoraire et la droite se penche continûment pour passer entre les mêmes deux trous et déterminer une famille de domaines de translation. Voir la figure 45a. Lorsque $\arg \varepsilon = 0$, les

trous sont alignés verticalement et on détermine ainsi un domaine de translation. Ensuite, en repartant de $\arg \varepsilon = \pi$, on laisse maintenant tourner ε dans le sens antihoraire. Les trous tournent dans le sens horaire et ℓ_ε se penche pour passer entre les mêmes deux trous pour définir un domaine de translation. Voir la figure 45b. Lorsque $\arg \varepsilon = 2\pi$, les trous sont à nouveau alignés verticalement, mais on remarque que l'on a obtenu un domaine de translation différent de celui obtenu en $\arg \varepsilon = 0$ (c'est-à-dire lorsque l'on tournait dans le sens horaire) : comparer les figures 45a et 45b. Pour résumer, en voulant prendre une famille de droites admissibles $\{\ell_\varepsilon\}_\varepsilon$ continue en ε , on obtient nécessairement deux domaines de translation différents pour $\arg \varepsilon = 0$ et $\arg \varepsilon = 2\pi$, donc on ne peut pas obtenir une famille de domaines de translation $\{U_\varepsilon^L\}_\varepsilon$ continue en ε .

Pour contourner le problème, on introduit le paramètre $\widehat{\varepsilon}$ sur le revêtement universel de $D(0, r')^*$. On distingue les éléments de la fibre de ε par $\widehat{\varepsilon}e^{2i\pi n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Une déformation g_ε induit une famille en $\widehat{\varepsilon}$ en posant $g_{\widehat{\varepsilon}e^{2i\pi n}} = g_\varepsilon$ pour tout n . Ainsi, les domaines de translation en $\arg \varepsilon = 0$ et $\arg \varepsilon = 2\pi$, qui sont différents sur la figure 45, sont maintenant associés à des valeurs différentes de $\widehat{\varepsilon}$.

On introduit la notation suivante. On définit un secteur d'ouverture 2γ centré en θ_0 par

$$\Omega_{\theta_0, \gamma} = \{\widehat{\varepsilon} : 0 < |\widehat{\varepsilon}| < r', \theta_0 - \gamma < \arg \widehat{\varepsilon} < \theta_0 + \gamma\} \quad (5.2.3)$$

dans le revêtement universel. On s'intéressera particulièrement à

$$\Omega_{\pi, 2\pi-\delta} = \{\widehat{\varepsilon} = \rho e^{i\theta} \mid 0 < \rho < r', -\pi + \delta < \theta < 3\pi - \delta\} \quad (5.2.4)$$

pour $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ déterminé plus tard. Voir la figure 46.

5.2.4.2. Théorème de dépendance du paramètre. Le paragraphe 5.2.4.1 illustre pourquoi notre construction des coordonnées de Fatou ne permet pas d'établir qu'une famille de coordonnées de Fatou puisse être continue en ε autour de l'origine. La famille de domaines de translation n'est pas « continue » en ε , seulement en $\widehat{\varepsilon}$, voir la figure 47. Par contre, on voit qu'il n'y a aucune obstruction à obtenir la dépendance holomorphe en $\widehat{\varepsilon}$ sur $\Omega_{\pi, 2\pi-\delta}$. Dans ce cas, ce sera une conséquence de la construction de la section 4.1.3 et du théorème d'Ahlfors-Bers (le théorème 4.1.6).

Le théorème suivant énonce l'existence d'un δ pour un secteur $\Omega_{\pi, 2\pi-\delta}$ de la taille dont on aura besoin, mais n'indique pas comment trouver δ . Puisque c'est plus technique, cette partie est placée à l'annexe A.

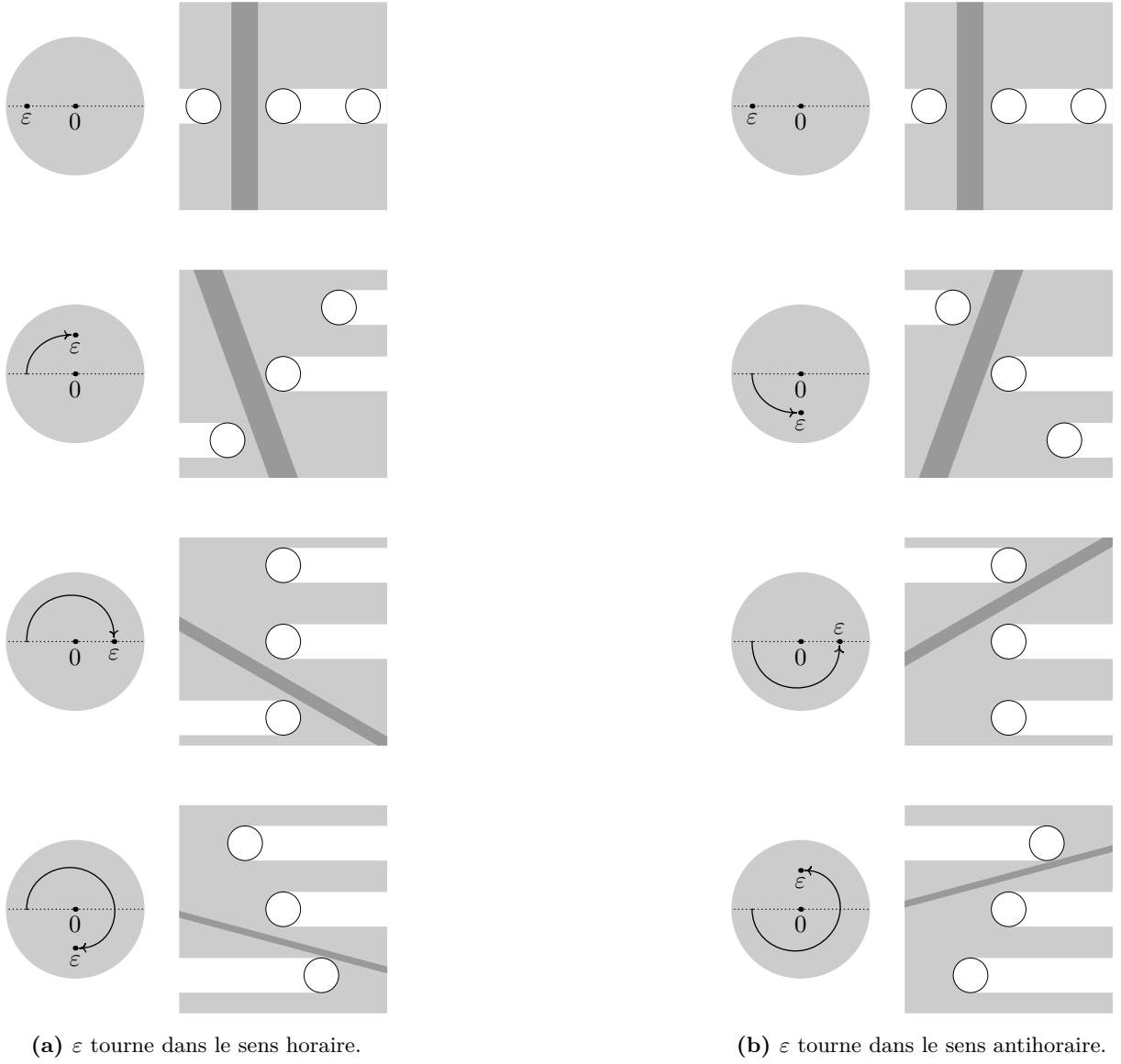


Figure 45. Comparaison entre les domaines de translation obtenus lorsque ε tourne dans les sens horaire et antihoraire.

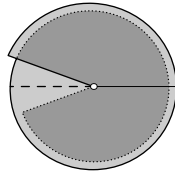


Figure 46. Secteur $\Omega_{\pi, 2\pi-\delta}$.

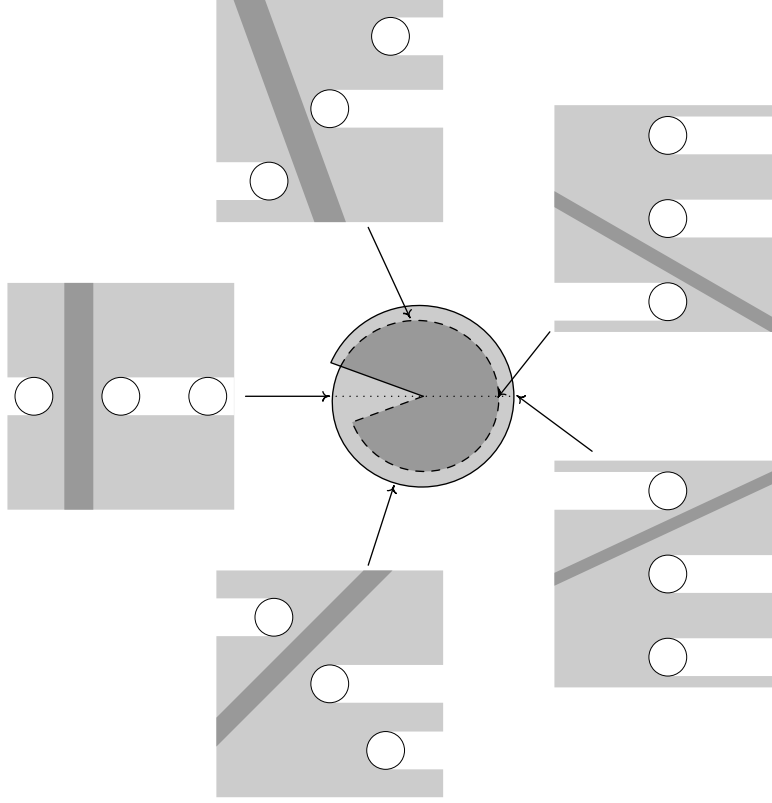


Figure 47. Famille de domaines de translation paramétrée par $\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}$.

Théorème 5.2.3 (Dépendance du paramètre [14]). *Pour tout $\delta \in (0, \pi)$, il existe $r' > 0$ tel que pour chaque $\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}$, il existe un domaine de translation $U_{\widehat{\varepsilon}}$ et tel que*

$$Q = \bigcup_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}} \{\widehat{\varepsilon}\} \times U_{\widehat{\varepsilon}}$$

est une variété complexe de dimension 2. De plus, il existe une famille Φ de coordonnées de Fatou définie sur Q telle que Φ est holomorphe en $(\widehat{\varepsilon}, Z)$ et est continue en $\widehat{\varepsilon} = 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{\substack{\widehat{\varepsilon} \rightarrow 0 \\ \widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}}} \Phi(\widehat{\varepsilon}, \cdot) = \Phi_0(\cdot)$$

où la convergence est uniforme sur les compacts et Φ_0 est une coordonnée de Fatou de g_0 sur U_0 .

Pour déterminer de façon unique la famille, il suffit de choisir un point de base holomorphe en $\widehat{\varepsilon}$. Par exemple, $\Phi(\widehat{\varepsilon}, X_\varepsilon) = 0$, où $X_\varepsilon = Z_\varepsilon(x)$, pour x fixé tel que $|\sqrt{\varepsilon}| < |x| < r$ pour tout ε .

Remarques 5.2.4. 1. Il y a plusieurs familles de domaines de translation telles que décrites dans l'énoncé du théorème. Si l'on choisit une droite admissible pour déterminer l'un

des domaines, alors le reste de la famille sera déterminée par ce choix à cause de la continuité.

2. La coordonnée de Fatou sur $U_{\widehat{\varepsilon}}$ ne dépend pas de la droite admissible choisie, seulement du domaine de translation qui en résulte. Autrement dit, si deux droites admissibles engendrent le même domaine de translation $U_{\widehat{\varepsilon}}$, et ainsi la même famille de domaines de translation, il n'y a tout de même qu'une seule famille de coordonnées de Fatou qui satisfait à $\Phi(\widehat{\varepsilon}, X_{\varepsilon}) = 0$.

Notation. Au vu de la remarque 5.2.4.1, on note par $\{U_{\widehat{\varepsilon}}^+\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}}$ (resp. $\{U_{\widehat{\varepsilon}}^-\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}}$) la famille de domaines de translation qui est obtenue en prenant une droite admissible verticale directement à gauche (resp. droite) du trou fondamental pour $\arg \widehat{\varepsilon} = \pi$ dans la coordonnée temps de Z_{ε}^+ (resp. Z_{ε}^-).

5.2.5. Coordonnées de Fatou du cas antiholomorphe

On définit une conjugaison complexe sur $\Omega_{\pi, 2\pi-\delta}$. Près de l'axe réel négatif, c'est-à-dire en $\arg \widehat{\varepsilon} = \pi$, on la définit comme étant la réflexion par rapport à cet axe et ensuite on prolonge analytiquement sur le reste de $\Omega_{\pi, 2\pi-\delta}$. On trouve ainsi la formule

$$\arg \overline{\widehat{\varepsilon}} = 2\pi - \arg \widehat{\varepsilon}. \quad (5.2.5)$$

En particulier, pour $\arg \widehat{\varepsilon} = \pi$, on voit que

$$\overline{\widehat{\varepsilon}} = |\widehat{\varepsilon}|e^{i\pi} = |\widehat{\varepsilon}|e^{2i\pi-i\pi} = \widehat{\varepsilon},$$

donc la conjugaison complexe est l'identité, alors qu'en prenant $\arg \widehat{\varepsilon} = 0$, on a $\overline{\widehat{\varepsilon}} = \widehat{\varepsilon}e^{2i\pi}$.

Théorème 5.2.5. Soit f_0 un germe antiholomorphe parabolique de codimension 1, f_{ε} une déformation sous forme préparée de f_0 et $f_{\widehat{\varepsilon}}$ la famille induite par f_{ε} sur $\Omega_{\pi, 2\pi-\delta}$.

1. (Existence) Il existe une paire de coordonnées de Fatou $(\Phi_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm}, \Phi_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm})$ sur $U_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm}$ et $U_{\overline{\widehat{\varepsilon}}}^{\pm}$ respectivement telle que

$$\Phi_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm} \circ F_{\widehat{\varepsilon}} \circ (\Phi_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm})^{-1} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}}. \quad (5.2.6)$$

2. (Unicité) Si $(\Phi_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm})'$ et $(\Phi_{\overline{\widehat{\varepsilon}}}^{\pm})'$ sont d'autres coordonnées de Fatou, alors il existe une constante $C_{\widehat{\varepsilon}} \in \mathbb{C}$ telle que

$$(\Phi_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm})' = T_{C_{\widehat{\varepsilon}}} \circ \Phi_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm},$$

$$(\Phi_{\overline{\widehat{\varepsilon}}}^{\pm})' = T_{\overline{C_{\widehat{\varepsilon}}}} \circ \Phi_{\overline{\widehat{\varepsilon}}}^{\pm}.$$

3. (Dépendance du paramètre) L'ensemble

$$Q^{\pm} = \bigcup_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}} \{\widehat{\varepsilon}\} \times U_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm}$$

est une variété complexe de dimension 2, où les familles $\{U_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm}\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}}$ sont choisies selon la notation suivant la remarque 5.2.4. De plus, il existe une famille Φ^{\pm} de coordonnées de Fatou de $f_{\widehat{\varepsilon}}$ définie sur Q^{\pm} telle que Φ^{\pm} est holomorphe en $(\widehat{\varepsilon}, Z) \in Q^{\pm}$ et est continue en $\widehat{\varepsilon} = 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{\substack{\widehat{\varepsilon} \rightarrow 0 \\ \widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}}} \Phi^{\pm}(\widehat{\varepsilon}, \cdot) = \Phi_0^{\pm}(\cdot)$$

où la convergence est uniforme sur les compacts et Φ_0^{\pm} est une coordonnée de Fatou de f_0 sur U_0^{\pm} .

Corollaire 5.2.6 (Unicité de la famille). *Une famille de coordonnées de Fatou de f_{ε} est uniquement déterminée par*

$$\overline{\Phi_{\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}})} + \Phi_{\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}}) = C(\widehat{\varepsilon}), \quad (5.2.7)$$

où $X_{\widehat{\varepsilon}}$ est un point de base et C commute avec σ . Une telle famille est holomorphe en $(\widehat{\varepsilon}, Z)$ et continue en $\widehat{\varepsilon} = 0$, pourvu que $X_{\widehat{\varepsilon}}$ et C le soient. En particulier, on peut prendre $C \equiv 0$ et $X_{\widehat{\varepsilon}}$ constant.

Démonstration du corollaire. Supposons que deux familles $\Phi_{j,\widehat{\varepsilon}}$, $j = 1, 2$, satisfont à (5.2.7), c'est-à-dire que

$$\overline{\Phi_{1,\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}})} + \Phi_{1,\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}}) = \overline{\Phi_{2,\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}})} + \Phi_{2,\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}}).$$

Par unicité, il existe une fonction D en $\widehat{\varepsilon}$ telle que $D(\widehat{\varepsilon}) = \overline{D(\widehat{\varepsilon})}$ et $\Phi_{2,\widehat{\varepsilon}} = T_{D(\widehat{\varepsilon})} \circ \Phi_{1,\widehat{\varepsilon}}$. Ainsi, en utilisant l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\Phi_{2,\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}})} + \Phi_{2,\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}}) - \overline{\Phi_{1,\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}})} - \Phi_{1,\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}}) \\ &= \overline{T_{D(\widehat{\varepsilon})} \circ \Phi_{1,\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}})} + T_{D(\widehat{\varepsilon})} \circ \Phi_{1,\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}}) - \overline{\Phi_{1,\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}})} - \Phi_{1,\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}}) \\ &= \overline{D(\widehat{\varepsilon})} + D(\widehat{\varepsilon}) \\ &= 2D(\widehat{\varepsilon}). \end{aligned}$$

D'où $\Phi_{2,\widehat{\varepsilon}} = \Phi_{1,\widehat{\varepsilon}}$.

Ensuite, pour voir qu'une famille $\Phi_{\widehat{\varepsilon}}$ déterminée par (5.2.7) est holomorphe en $\widehat{\varepsilon}$, on considère une famille $\widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}}$ holomorphe en $\widehat{\varepsilon}$, dont l'existence est garantie par le théorème 5.2.5. Par unicité, il existe une fonction E en $\widehat{\varepsilon}$ qui commute avec σ telle que $\widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}} = T_{E(\widehat{\varepsilon})} \circ \Phi_{\widehat{\varepsilon}}$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \overline{\widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}})} + \widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}}) &= \overline{E(\widehat{\varepsilon})} + \overline{\Phi_{\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}})} + E(\widehat{\varepsilon}) + \Phi_{\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}}) \\ &= 2E(\widehat{\varepsilon}) + C(\widehat{\varepsilon}). \end{aligned}$$

On isole E dans l'équation

$$2E(\widehat{\varepsilon}) = \overline{\widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}})} + \widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}}(X_{\widehat{\varepsilon}}) - C(\widehat{\varepsilon}).$$

Le côté droit est holomorphe en $\widehat{\varepsilon}$, donc E l'est aussi. Il s'ensuit que $\Phi_{\widehat{\varepsilon}} = T_{-E(\widehat{\varepsilon})} \circ \widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}}$ est holomorphe en $\widehat{\varepsilon}$. \square

Démonstration du théorème 5.2.5. Commençons par montrer que Q^{\pm} est une variété complexe de dimension 2. On omet les \pm pour alléger la notation. On affirme que tout point $(\widehat{\varepsilon}_0, Z_0) \in Q$ possède un voisinage de \mathbb{C}^2 contenu dans Q . En effet, ceci se démontre exactement comme dans la preuve du point 4 du théorème 4.1.7. On a donc que les deux ensembles

$$\mathcal{U}_1 = \bigcup_{\substack{-\pi+\delta < \arg \widehat{\varepsilon} < \pi \\ 0 < |\widehat{\varepsilon}| < r'}} \{\widehat{\varepsilon}\} \times U_{\widehat{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \mathcal{U}_2 = \bigcup_{\substack{\pi-\delta < \arg \widehat{\varepsilon} < 3\pi-\delta \\ 0 < |\widehat{\varepsilon}| < r'}} \{\widehat{\varepsilon}\} \times U_{\widehat{\varepsilon}}$$

sont ouverts dans \mathbb{C}^2 . On obtient Q comme une variété en prenant \mathcal{U}_1 et \mathcal{U}_2 comme cartes et en identifiant \mathcal{U}_1 à \mathcal{U}_2 sur l'intersection

$$\bigcup_{\substack{\pi-\delta < \arg \widehat{\varepsilon} < \pi \\ 0 < |\widehat{\varepsilon}| < r'}} \{\widehat{\varepsilon}\} \times U_{\widehat{\varepsilon}}$$

avec l'identité.

On montre maintenant les points 1 et 3 du même coup. Soit $\widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm}$ une coordonnée de Fatou de $g_{\widehat{\varepsilon}}$ sur $U_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm}$ continue en $(\widehat{\varepsilon}, Z)$ et holomorphe pour $\widehat{\varepsilon} \neq 0$. On la notera simplement $\widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}}$ pour alléger la notation. On pose $\widetilde{P}_{\widehat{\varepsilon}} = \widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}} \circ F_{\widehat{\varepsilon}} \circ (\widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}})^{-1}$. On obtient

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_{\widehat{\varepsilon}} \circ \widetilde{P}_{\widehat{\varepsilon}} &= (\widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}} \circ F_{\widehat{\varepsilon}} \circ \widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}}^{-1}) \circ (\widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}} \circ F_{\widehat{\varepsilon}} \circ \widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}}^{-1}) \\ &= \widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}} \circ F_{\widehat{\varepsilon}} \circ F_{\widehat{\varepsilon}} \circ \widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}}^{-1} \\ &= \widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}} \circ G_{\widehat{\varepsilon}} \circ \widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}}^{-1} \\ &= T_1. \end{aligned}$$

Il s'en suit que $\widetilde{P}_{\widehat{\varepsilon}} \circ T_1 = T_1 \circ \widetilde{P}_{\widehat{\varepsilon}}$.

Ensuite, l'argument habituel fonctionne. À l'aide du revêtement universel $E: W \mapsto w = \exp(-2i\pi W)$, $\widetilde{P}_{\widehat{\varepsilon}}$ induit un difféomorphisme $\tilde{p}_{\widehat{\varepsilon}}$ de $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ qui se prolonge à l'origine et à l'infini par $\tilde{p}_{\widehat{\varepsilon}}(0) = \infty$ et $\tilde{p}_{\widehat{\varepsilon}}(\infty) = 0$. En effet, $\widetilde{P}_{\widehat{\varepsilon}}$ envoie un demi-plan $\{\Im Z_{\widehat{\varepsilon}} > R\}$ sur un voisinage qui contient un demi-plan $\{\Im Z_{\widehat{\varepsilon}} < R'\}$. Un tel difféomorphisme antiholomorphe de la sphère doit être une inversion $w \mapsto \frac{c(\widehat{\varepsilon})}{w}$ pour une constante $c(\widehat{\varepsilon}) \in \mathbb{C}$.

En revenant à la coordonnée W , on voit que $\widetilde{P}_{\widehat{\varepsilon}}$ est de la forme $\Sigma \circ T_{\widetilde{C}(\widehat{\varepsilon})}$, où \widetilde{C} est une fonction de $\widehat{\varepsilon}$. Notons que $\Sigma \circ P_{\widehat{\varepsilon}}$ est continue en $(\widehat{\varepsilon}, Z)$ et holomorphe pour $\widehat{\varepsilon} \neq 0$ et donc \widetilde{C} aussi. Puisque $\widetilde{P}_{\widehat{\varepsilon}} \circ \widetilde{P}_{\widehat{\varepsilon}} = T_1$, on a $\overline{\widetilde{C}(\widehat{\varepsilon})} + \widetilde{C}(\widehat{\varepsilon}) = 1$.

Pour la suite, on changera de coordonnées de Fatou de sorte à obtenir la constante $\frac{1}{2}$. On veut remplacer les coordonnées de Fatou par d'autres coordonnées qui ont la même régularité que les coordonnées de départ. (Si on ne tient pas compte de la régularité, il est bien plus facile de trouver des nouvelles coordonnées de Fatou qui font l'affaire.)

On remplace la coordonnée de Fatou par

$$\Phi_{\widehat{\varepsilon}} = T_{-\overline{\widetilde{C}(\widehat{\varepsilon})/2}} \circ \widetilde{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}}.$$

Cette nouvelle coordonnée de Fatou a la même régularité que l'ancienne, car $\sigma \circ \widetilde{C} \circ \sigma$ a aussi cette régularité. On obtient ainsi une nouvelle fonction

$$\begin{aligned} P_{\widehat{\varepsilon}} &= T_{-\overline{\widetilde{C}(\widehat{\varepsilon})/2}} \circ \widetilde{P}_{\widehat{\varepsilon}} \circ T_{\overline{\widetilde{C}(\widehat{\varepsilon})/2}} \\ &= T_{-\overline{\widetilde{C}(\widehat{\varepsilon})/2}} \circ \Sigma \circ T_{\widetilde{C}(\widehat{\varepsilon})} \circ T_{\overline{\widetilde{C}(\widehat{\varepsilon})/2}} \\ &= \Sigma \circ T_{C(\widehat{\varepsilon})}, \end{aligned}$$

où C est une nouvelle fonction qui dépend de $\widehat{\varepsilon}$. On a

$$\begin{aligned} C(\widehat{\varepsilon}) &= -\frac{\widetilde{C}(\widehat{\varepsilon})}{2} + \widetilde{C}(\widehat{\varepsilon}) + \frac{\overline{\widetilde{C}(\widehat{\varepsilon})}}{2} \\ &= \frac{\widetilde{C}(\widehat{\varepsilon}) + \overline{\widetilde{C}(\widehat{\varepsilon})}}{2}. \end{aligned}$$

On a maintenant que $\overline{C(\widehat{\varepsilon})} = C(\widehat{\varepsilon})$. Puisque $\overline{C(\widehat{\varepsilon})} + C(\widehat{\varepsilon}) = 1$, on conclut que $C(\widehat{\varepsilon}) = \frac{1}{2}$. Ainsi, les coordonnées de Fatou $\Phi_{\widehat{\varepsilon}}$ et $\Phi_{\widehat{\varepsilon}}$ sont un choix qui satisfait aux points 1 et 3 de l'énoncé.

Pour l'unicité, on considère d'autres coordonnées de Fatou Φ'_1 et Φ'_2 sur $U_{\widehat{\varepsilon}}$ et $U_{\widehat{\varepsilon}}$ respectivement. Par l'unicité des coordonnées de Fatou pour le cas holomorphe, il existe des constantes C_1 et C_2 complexes telles que $\Phi'_1 = T_{C_1} \circ \Phi_{\widehat{\varepsilon}}$ et $\Phi'_2 = T_{C_2} \circ \Phi_{\widehat{\varepsilon}}$. On doit préserver

$$\frac{1}{2} = \overline{C_2} + \frac{1}{2} - C_1,$$

d'où $C_2 = \overline{C_1}$. □

5.2.6. Fonctions de transition et application de Lavaurs

Soit $\{\Phi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,\pm}\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi,2\pi-\delta}}$ une famille de coordonnées de Fatou sur $\Omega_{\pi,2\pi-\delta}$ qui est holomorphe en $\widehat{\varepsilon}$. Comme à la section 4.2.2, on peut obtenir deux familles $\{\Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,0}\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi,2\pi-\delta}}$ et $\{\Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty}\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi,2\pi-\delta}}$ de fonctions de transition à l'aide des coordonnées de Fatou de $f_{\widehat{\varepsilon}}$. Il suit à ce moment qu'elles satisfont à

$$\Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty} \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,0} \quad (5.2.8)$$

à cause de l'équation (5.2.6). Ainsi, l'une des familles est déterminée par l'autre, donc on se référera seulement à $\{\Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty}\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}}$ sachant que $\{\Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,0}\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}}$ est déterminée par l'équation (5.2.8).

Ensuite, on peut définir l'application de Lavaurs entre deux croissants comme dans le cas $\varepsilon < 0$, voir la figure 48. Comme chaque croissant est conformément équivalent à \mathbb{C}^* et que l'application de Lavaurs se prolonge à l'origine et à l'infini, il s'ensuit que l'application de Lavaurs est une application linéaire sur l'espace des orbites de g_ε et donc qu'elle est une translation dans la coordonnée temps. On la note $T_{\widehat{\varepsilon}}^L$.

La composée $T_{\widehat{\varepsilon}}^L \circ \Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty}$ est l'application de premier retour dans le voisinage du point fixe $\sqrt{\widehat{\varepsilon}}$. La dynamique de $g_{\widehat{\varepsilon}}$ près de $-\sqrt{\widehat{\varepsilon}}$ est déterminée par la dynamique de $g_{\overline{\widehat{\varepsilon}}}$ près de $\sqrt{\overline{\widehat{\varepsilon}}}$, car $\Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,0}$ est déterminée à partir de $\Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty}$.

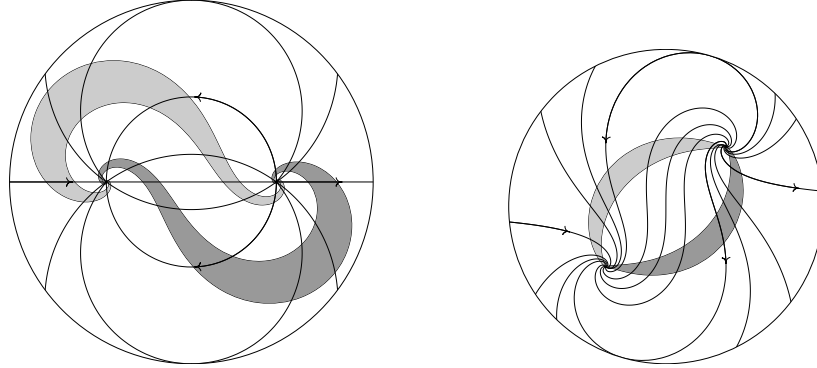


Figure 48. Croissants pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$ et $\varepsilon = \frac{e^{i\pi/2}}{4}$ dans le cas de la forme normale, avec $b = 0$.

On décrit les propriétés analytiques des fonctions de transition du point de vue de Lavaurs, mais assez brièvement puisqu'elles sont analogues à celles présentées à la section 4.2.5 pour $\varepsilon < 0$.

Les fonctions de transition commutent avec T_1 , donc $\Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty}$ possède un développement de la forme

$$\Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty}(W) = W + c_0^L(\widehat{\varepsilon}) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^L(\widehat{\varepsilon}) e^{2i\pi n W}. \quad (5.2.9)$$

Soit $c_0^{L,0}(\widehat{\varepsilon})$ le coefficient constant du développement de $\Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,0}$. Alors on a

$$c_0^{L,0}(\widehat{\varepsilon}) - c_0^L(\widehat{\varepsilon}) = 2i\pi b(\widehat{\varepsilon}). \quad (5.2.10)$$

Cette équation est invariante, c'est-à-dire indépendante du choix de coordonnées de Fatou.

En comparant les termes constants de l'équation (5.2.8), on obtient également la relation

$$c_0^L(\overline{\widehat{\varepsilon}}) = \overline{c_0^{L,0}(\widehat{\varepsilon})}. \quad (5.2.11)$$

En combinant les équations (5.2.10) et (5.2.11), on trouve

$$\overline{c_0^L(\widehat{\varepsilon})} - c_0^L(\widehat{\varepsilon}) = 2i\pi b(\widehat{\varepsilon}). \quad (5.2.12)$$

Lemme 5.2.7. *Il existe une famille de fonctions de transition du point de vue de Lavaurs $\{\Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty}\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}}$ de f_ε telle que*

$$c_0^L(\widehat{\varepsilon}) = -i\pi b(\widehat{\varepsilon}). \quad (5.2.13)$$

On dira qu'une telle famille est normalisée.

De plus, si $\{\widetilde{\Psi}_{\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty}\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}}$ est une autre famille normalisée de f_ε , alors il existe une fonction C holomorphe en $\widehat{\varepsilon}$ et continue en $\widehat{\varepsilon} = 0$ qui commute avec σ telle que

$$\widetilde{\Psi}_{\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty} = T_{C(\widehat{\varepsilon})} \circ \Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty} \circ T_{-C(\widehat{\varepsilon})}.$$

Démonstration. Soit $\{\check{\Psi}_{\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty}\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}}$ une famille dont le coefficient constant de chaque $\check{\Psi}_{\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty}$ est $\check{c}_0^L(\widehat{\varepsilon})$ et qui est obtenue par les familles de coordonnées de Fatou $\{\check{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}}^\pm\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}}$. On remplace $\check{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}}^+$ par

$$\Phi_{\widehat{\varepsilon}}^+ = T_{D(\widehat{\varepsilon})} \circ \check{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}}^+,$$

où $D(\widehat{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \left(\check{c}_0^L(\widehat{\varepsilon}) + \overline{\check{c}_0^L(\widehat{\varepsilon})} \right)$. Notons que $\Phi_{\widehat{\varepsilon}}^+$ est toujours une coordonnée de Fatou de f_ε puisque $D(\widehat{\varepsilon}) = \overline{D(\widehat{\varepsilon})}$.

Soit $\{\Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty}\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}}$ la nouvelle famille obtenue de $\{\check{\Phi}_{\widehat{\varepsilon}}^-\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}}$ et $\{\Phi_{\widehat{\varepsilon}}^+\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}}$. Son coefficient constant $c_0^L(\widehat{\varepsilon})$ est maintenant donné par

$$c_0^L(\widehat{\varepsilon}) = \frac{\check{c}_0^L(\widehat{\varepsilon}) - \overline{\check{c}_0^L(\widehat{\varepsilon})}}{2}.$$

On voit ainsi que $\sigma \circ c_0^L = -c_0^L \circ \sigma$. En remplaçant dans l'équation (5.2.12), on obtient $c_0^L(\widehat{\varepsilon}) = -i\pi b(\widehat{\varepsilon})$.

La deuxième partie de l'énoncé s'obtient en combinant l'unicité des coordonnées de Fatou (théorème 5.2.5) et le fait de devoir préserver $-i\pi b(\widehat{\varepsilon})$ comme terme constant des fonctions de transition. \square

Comme on le voit dans le lemme 5.2.7, il reste plusieurs choix possibles de familles normalisées de fonctions de transition du point de vue de Lavaurs, donc on définit la relation d'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} & \exists C(\widehat{\varepsilon}) \text{ holomorphe sur } \Omega_{\pi, 2\pi-\delta} \\ & \Psi_1^L \sim \Psi_2^L \iff \text{telle que } C(\widehat{\varepsilon}) = \overline{C(\widehat{\varepsilon})} \text{ et} \\ & \Psi_{1,\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty} = T_{C(\widehat{\varepsilon})} \circ \Psi_{2,\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty} \circ T_{-C(\widehat{\varepsilon})}, \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

où Ψ désigne la fonction $\Psi(\varepsilon, Z) = \Psi_\varepsilon^{L,\infty}(Z)$. On notera la classe d'équivalence $[\Psi^L]$.

On termine cette section en notant le lien entre l'invariant géométrique de la définition 4.2.9 et la classe de familles de fonctions de transition du point de vue de Lavaurs.

Pour $\arg \widehat{\varepsilon} = \pi$, $\Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty}$ correspond à $\Psi_{\varepsilon}^{\infty}$ ($\varepsilon < 0$) dans le module de classification. En voici la répercussion.

Lemme 5.2.8. *Soit $f_{j,\varepsilon}$ ($j = 1, 2$) deux déformations sous forme préparée d'un germe antiholomorphe parabolique f_0 de codimension 1. Si elles ont le même invariant géométrique (définition 4.2.9), alors elles ont la même classe $[\Psi^L]$ de fonctions de transition du point de vue de Lavaurs, où la relation d'équivalence est définie à (5.2.14).*

Démonstration. Soit $\{\Psi_{j,\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty}\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}}$ un représentant de la classe de familles de fonctions de transition du point de vue de Lavaurs de $f_{j,\varepsilon}$. Sans perte de généralité, pour $\arg \widehat{\varepsilon} = \pi$ et $\varepsilon < 0$, on peut supposer que

$$\Psi_{1,\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty} = \Psi_{\varepsilon}^{\infty} = \Psi_{2,\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty},$$

car pour $\varepsilon < 0$, les fonctions de transition $\Psi_{\varepsilon}^{\infty}$ correspondent aux fonctions de transition du point de vue de Lavaurs. Ainsi, vu comme des fonctions des variables $(\widehat{\varepsilon}, W)$, on a $\Psi_1^{L,\infty} = \Psi_2^{L,\infty}$ sur l'ensemble

$$Q_0 = \bigcup_{\widehat{\varepsilon} \in (-r', 0)} \{\widehat{\varepsilon}\} \times V_{\widehat{\varepsilon}}^+ \subseteq Q,$$

où $V_{\widehat{\varepsilon}}^+ = \Phi_{\widehat{\varepsilon}}^+(U_{\widehat{\varepsilon}}^+)$ et Q est la variété complexe du théorème 5.2.5.

On souhaite conclure avec le principe d'identité. Par le théorème 5.2.5, Q est une variété complexe, donc pour chaque $(\widehat{\varepsilon}_0, W_0) \in Q_0$, il existe un bi-disque $B(\widehat{\varepsilon}_0, r_{\widehat{\varepsilon}_0}) \times B(W_0, r_{W_0})$ dans Q . Pour chaque $W \in B(W_0, r_{W_0})$ fixé, on a $\Psi_{1,\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty}(W) = \Psi_{2,\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty}(W)$ pour $\widehat{\varepsilon} \in B(\widehat{\varepsilon}_0, r_{\widehat{\varepsilon}_0}) \cap \{\arg \widehat{\varepsilon} = \pi\}$. Par le principe d'identité à une variable, cette équation est vraie pour tout $\widehat{\varepsilon} \in B(\widehat{\varepsilon}_0, r_{\widehat{\varepsilon}_0})$. Comme ceci est vrai pour chaque $W \in B(W_0, r_{W_0})$, on conclut que $\Psi_1^{L,\infty} = \Psi_2^{L,\infty}$ sur le bi-disque. On obtient la conclusion sur Q par le principe d'identité. \square

5.3. Théorème d'équivalence forte

Voici le théorème principal du chapitre. La version holomorphe de ce théorème est présentée dans l'addendum de [14].

Théorème 5.3.1 (Équivalence forte). *Deux déformations génériques $f_{j,\varepsilon}$ ($j = 1, 2$) sous forme préparée d'un germe antiholomorphe parabolique f_0 de codimension 1 sont fortement équivalentes si et seulement si elles ont le même module de classification (définition 4.2.9), c'est-à-dire si et seulement si elles sont faiblement équivalentes.*

Corollaire 5.3.2. *Soit $f_{1,\alpha}$ et $f_{2,\beta}$ deux déformations génériques d'un germe antiholomorphe parabolique f_0 de codimension 1. Elles sont fortement équivalentes si et seulement si elles ont le même module de classification.*

Démonstration du corollaire 5.3.2. Si $f_{1,\alpha}$ et $f_{2,\beta}$ ont le même module, alors elles ont le même paramètre canonique et la même forme normale. Par le théorème 3.2.9, elles sont fortement

équivalentes à leur forme préparée $\widetilde{f}_{j,\varepsilon}$. Puisqu'elles ont le même invariant géométrique, leurs formes préparées sont faiblement équivalentes et par le théorème 5.3.1, elles sont fortement équivalentes. La composition des équivalences fortes donne l'équivalence forte recherchée entre $f_{1,\alpha}$ et $f_{2,\beta}$. \square

5.3.1. Démonstration du théorème d'équivalence forte

L'idée de la démonstration du théorème 5.3.1 est la même que celle présentée dans l'addendum de [14]. Elle va comme suit. Les coordonnées de Fatou du point de vue de Lavaurs permettent de définir une famille de difféomorphismes $\{h_{\widehat{\varepsilon}}\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}}$ holomorphe en $\widehat{\varepsilon}$ par

$$h_{\widehat{\varepsilon}}(z) = \begin{cases} (Z_{\widehat{\varepsilon}}^+)^{-1} \circ (\Phi_{2,\widehat{\varepsilon}}^+)^{-1} \circ \Phi_{1,\widehat{\varepsilon}}^+ \circ Z_{\widehat{\varepsilon}}^+(z), & \text{si } z \in S_{\widehat{\varepsilon}}^+; \\ (Z_{\widehat{\varepsilon}}^-)^{-1} \circ (\Phi_{2,\widehat{\varepsilon}}^-)^{-1} \circ \Phi_{1,\widehat{\varepsilon}}^- \circ Z_{\widehat{\varepsilon}}^-(z), & \text{si } z \in S_{\widehat{\varepsilon}}^-; \end{cases} \quad (5.3.1)$$

qui envoie $f_{1,\varepsilon}$ sur $f_{2,\varepsilon}$ selon l'équation

$$h_{\widehat{\varepsilon}} \circ f_{1,\varepsilon} \circ h_{\widehat{\varepsilon}}^{-1} = f_{2,\varepsilon}.$$

On discutera des détails de l'équation 5.3.1 dans la démonstration du théorème 5.3.1 à la fin de la section. En particulier il faudra définir les secteurs $S_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm}$ dans la coordonnée z et montrer que $h_{\widehat{\varepsilon}}$ est bien définie pour chaque $\widehat{\varepsilon}$ fixé. On suppose pour le moment que la famille $\{h_{\widehat{\varepsilon}}\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}}$ est bien définie et dépend de $\widehat{\varepsilon}$ de façon holomorphe sur $\Omega_{\pi, 2\pi-\delta}$.

Le problème principal consiste à obtenir une famille uniforme en ε . Sur le secteur d'auto-intersection de $\Omega_{\pi, 2\pi-\delta}$, on a deux difféomorphismes $h_{\widehat{\varepsilon}}$ et $h_{\widehat{\varepsilon}e^{2i\pi}}$ pour $|\arg \widehat{\varepsilon}| < \pi - \delta$. On montrera que $h_{\widehat{\varepsilon}} = h_{\widehat{\varepsilon}e^{2i\pi}}$ ou qu'il existe une correction qui permet d'obtenir cette égalité. De cette façon, on peut définir le difféomorphisme h_{ε} uniforme en $\varepsilon \in D(0, r)$.

Le reste de la section introduit les outils pour résoudre ce problème et ainsi démontrer le théorème 5.3.1. La section est structurée comme suit : on transporte le problème principal à l'étude de familles de difféomorphismes $\{\gamma_{\varepsilon}\}_{\varepsilon}$ qui vérifient $\gamma_{\widehat{\varepsilon}}^{-1} \circ f_{\varepsilon} = f_{\varepsilon} \circ \gamma_{\varepsilon}$, on étudie ces familles, ensuite on introduit le problème de Cousin qui sera utilisé dans la démonstration du théorème.

Puisque $h_{\widehat{\varepsilon}}$ vérifie l'équation

$$h_{\widehat{\varepsilon}} \circ f_{1,\widehat{\varepsilon}} \circ h_{\widehat{\varepsilon}}^{-1} = f_{2,\widehat{\varepsilon}},$$

on obtient que $\gamma_{\varepsilon} := h_{\widehat{\varepsilon}}^{-1} \circ h_{\widehat{\varepsilon}e^{2i\pi}}$, $|\arg \widehat{\varepsilon}| < \pi - \delta$, satisfait à

$$f_{1,\varepsilon} \circ \gamma_{\varepsilon} = \gamma_{\varepsilon}^{-1} \circ f_{1,\varepsilon},$$

en utilisant le fait que $f_{j,\varepsilon} = f_{j,\widehat{\varepsilon}e^{2i\pi}}$ et la formule (5.2.5). On note que γ_ε est définie pour ε dans l'auto-intersection de $\Omega_{\pi,2\pi-\delta}$ dans $D(0,r')^*$, c'est-à-dire le secteur

$$\Omega_{\pi,2\pi-\delta}^\cap = \{\varepsilon : 0 < |\varepsilon| < r', \arg \varepsilon \in (-\pi + \delta, \pi - \delta)\},$$

et possède la limite $\gamma_\varepsilon \rightarrow id$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pour presque toutes les déformations génériques, ces γ_ε se réduisent à l'identité. Il y a, par contre, un cas problématique. On dit que f_ε est *plongeable dans un champ* sur un secteur $\Omega \subset D(0,r')^*$ dans l'espace ε dont l'ouverture est plus petite que 2π et symétrique par rapport à l'axe réel s'il existe un difféomorphisme m_ε holomorphe en ε sur Ω tel que

$$f_\varepsilon = m_\varepsilon \circ \sigma \circ v_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \circ m_\varepsilon^{-1}, \quad \text{pour } \varepsilon \in \Omega. \quad (5.3.2)$$

Il s'ensuit que m_ε conjugue également g_ε sur sa forme normale. Ceci est équivalent à ce que $\Psi_\varepsilon^{L,\infty}$ soit une translation pour $\varepsilon \in \Omega$. Ainsi, si f_ε n'est pas plongeable dans un champ sur Ω , alors il existe un $\varepsilon \in \Omega$ pour lequel $\Psi_\varepsilon^{L,\infty}$ n'est pas une translation.

Proposition 5.3.3. *Soit f_0 un germe antiholomorphe parabolique de codimension 1 et soit f_ε une déformation sous forme préparée à un paramètre de f_0 . Soit le secteur*

$$\Omega_{0,\theta_0} = \{\varepsilon : 0 < |\varepsilon| < r', \arg \varepsilon \in (-\theta_0, \theta_0)\} \subset D(0,r')^*,$$

où $0 < \theta_0 < \pi$. Soit γ_ε une famille de difféomorphismes holomorphes qui dépend continûment de $\varepsilon \in \Omega_{0,\theta_0}$ telle que $\gamma_\varepsilon \rightarrow id$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et qui vérifie l'une des propriétés suivantes :

- i. $\gamma_{\bar{\varepsilon}} \circ f_\varepsilon = f_\varepsilon \circ \gamma_\varepsilon$;
- ii. $\gamma_{\bar{\varepsilon}}^{-1} \circ f_\varepsilon = f_\varepsilon \circ \gamma_\varepsilon$.

Alors on a les cas suivants :

1. Si f_0 n'est pas plongeable dans un champ, c'est-à-dire que $\Psi_0^{L,\infty}$ n'est pas une translation, alors $\gamma_\varepsilon = id$;
2. Si f_0 est plongeable dans un champ, alors on a les deux cas suivants :
 - a) Si f_ε n'est pas plongeable dans un champ sur le secteur Ω_{0,θ_0} , alors $\gamma_\varepsilon = id$;
 - b) Si f_ε est plongeable dans un champ sur le secteur Ω_{0,θ_0} , alors il existe une unique fonction t continue en $\varepsilon \in \Omega_{0,\theta_0}$ telle que $t(\varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\gamma_\varepsilon = m_\varepsilon^{-1} \circ v_\varepsilon^{t(\varepsilon)} \circ m_\varepsilon$, où m_ε satisfait à (5.3.2). De plus,
 - si γ_ε est holomorphe en ε , alors il en est de même pour t ;
 - si γ_ε vérifie la propriété i, alors $t \circ \sigma = \sigma \circ t$;
 - si γ_ε vérifie la propriété ii, alors $t \circ \sigma = -\sigma \circ t$.

Notation. Si l'on se trouve dans le cas 2b), puisque t est unique, on peut donner un sens à l'itérée t -ième de g_ε en posant

$$g_\varepsilon^{t(\varepsilon)} := m_\varepsilon^{-1} \circ v_\varepsilon^{t(\varepsilon)} \circ m_\varepsilon.$$

Ainsi, si γ_ε est telle que dans l'énoncé, alors on peut écrire $\gamma_\varepsilon = g_\varepsilon^{t(\varepsilon)}$. Avec cette notation, $g_\varepsilon^{t(\varepsilon)}$ commute avec g_ε et satisfait à

$$\overline{g_\varepsilon^{t(\varepsilon)}} \circ f_\varepsilon = f_\varepsilon \circ g_\varepsilon^{t(\varepsilon)}.$$

Démonstration. Puisque γ_ε respecte la propriété *i* ou *ii*, il s'ensuit que

$$\gamma_\varepsilon \circ g_\varepsilon = g_\varepsilon \circ \gamma_\varepsilon.$$

Ainsi, pour chaque ε fixé, γ_ε envoie les orbites de g_ε sur les orbites de g_ε et donc γ_ε induit un difféomorphisme sur l'espace des orbites de g_ε . Cet espace est formé d'une sphère avec l'identification des orbites au voisinage de 0 et de l'infini par les applications de premier retour. Ainsi, l'application induite par γ_ε est une transformation de Möbius qui fixe l'origine et l'infini, c'est donc une application linéaire. Sur les coordonnées de Fatou, c'est une translation. On considère les deux familles de coordonnées de Fatou $\{\Phi_\varepsilon^\pm\}_{\varepsilon \in \Omega_{0,\theta_0}}$ du point de vue de Lavaurs holomorphes en ε sur Ω_{0,θ_0} . Dans ces coordonnées, on peut supposer que γ_ε est la translation $T_{t(\varepsilon)}$. Si on suppose que γ_ε est holomorphe en ε , alors $T_{t(\varepsilon)}$ l'est aussi, puisque Φ_ε l'est. (On remarque que Φ_ε^\pm dépend de ε plutôt que de $\widehat{\varepsilon}$, car on s'intéresse seulement à un secteur dont l'ouverture est plus petite que 2π .)

Soit $\{\Psi_\varepsilon^{L,\infty}\}_{\varepsilon \in \Omega_{0,\theta_0}}$ la famille de fonctions de transition holomorphe en $\varepsilon \in \Omega_{0,\theta_0}$ obtenue des familles $\{\Phi_\varepsilon^\pm\}_{\varepsilon \in \Omega_{0,\theta_0}}$.

Pour le point 1, le développement de Ψ_0^∞ possède au moins un coefficient non nul, disons $c_n(0)$. Par continuité, pour ε assez petit, le coefficient $c_n(\varepsilon)$ du développement (5.2.9) est non nul, donc seul un ensemble discret de translations contenu dans $\{T_{p/n} \mid p \in \mathbb{Z}\}$ commutent avec $\Psi_\varepsilon^{L,\infty}$. Puisque $T_{t(\varepsilon)}$ est continue en ε , t doit être constante et comme $t(\varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on conclut que $t(\varepsilon) \equiv 0$. Pour 2a), il existe un coefficient c_n non nul pour une valeur non nulle de ε . Puisque c_n est holomorphe, ses zéros s'accumulent seulement sur la frontière du secteur, donc on se retrouve dans le même cas que le point précédent.

Pour 2b), pour la forme normale, $T_{t(\varepsilon)}$ correspond à $v_\varepsilon^{t(\varepsilon)}$. Ainsi, on a $\gamma_\varepsilon = m_\varepsilon^{-1} \circ v_\varepsilon^{t(\varepsilon)} \circ m_\varepsilon$. Supposons maintenant qu'il existe t_1 et t_2 continues en ε telles que

$$\gamma_\varepsilon = m_\varepsilon^{-1} \circ v_\varepsilon^{t_j(\varepsilon)} \circ m_\varepsilon, \quad (j=1,2).$$

On constate alors que

$$\begin{aligned} (v_\varepsilon^{t_1(\varepsilon)})'(\pm\sqrt{\varepsilon}) &= (v_\varepsilon^{t_2(\varepsilon)})'(\pm\sqrt{\varepsilon}) \\ \iff \exp\left(\frac{\pm 2\sqrt{\varepsilon}}{1 \pm b\sqrt{\varepsilon}} t_1(\varepsilon)\right) &= \exp\left(\frac{\pm 2\sqrt{\varepsilon}}{1 \pm b\sqrt{\varepsilon}} t_2(\varepsilon)\right). \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que

$$t_1(\varepsilon) - t_2(\varepsilon) = \frac{1 \pm b\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{\varepsilon}}(2i\pi\ell - 2i\pi k).$$

Puisque le côté gauche tend vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on doit avoir $\ell = k$ du côté droite. Il s'ensuit que $t_1 = t_2$.

Pour terminer, si γ_ε vérifie la propriété *i*, alors on a

$$T_{t(\bar{\varepsilon})} \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ T_{t(\varepsilon)},$$

d'où $\overline{t(\bar{\varepsilon})} = t(\varepsilon)$.

Si γ_ε vérifie plutôt la propriété *ii*, alors on a

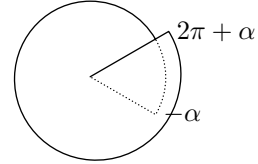
$$T_{-t(\bar{\varepsilon})} \circ \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} = \Sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ T_{t(\varepsilon)},$$

d'où $-\overline{t(\bar{\varepsilon})} = t(\varepsilon)$. □

Puisque dans le cas 2b), il existe des familles de γ_ε qui ne sont pas l'identité, il faudrait effectuer des changements de coordonnée pour corriger γ_ε . Ceci sera fait en utilisant la solution au problème de Cousin. Ce résultat est classique. On le présente ici avec une démonstration.

Théorème 5.3.4 (Problème de Cousin). *Soit $0 < \alpha < \pi$ et soit Ω_α un secteur sur le recouvrement universel du disque pointé à l'origine $D(0, r)^*$ donné par*

$$\Omega_\alpha := \Omega_{\pi, \pi+\alpha} = \{\widehat{\varepsilon} : 0 < |\widehat{\varepsilon}| < r', -\alpha < \arg \widehat{\varepsilon} < 2\pi + \alpha\}.$$



Soit Ω^\cap le secteur d'auto-intersection de Ω_α dans $D(0, r)^$. Soit enfin une fonction τ holomorphe sur Ω^\cap et continue sur $\Omega^\cap \cup \partial\Omega^\cap$. Alors il existe \mathcal{T} définie sur Ω_α et holomorphe telle que*

$$\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon}e^{2i\pi}) - \mathcal{T}(\widehat{\varepsilon}) = \tau(\varepsilon).$$

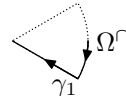
De plus, si τ a la propriété que $\tau \circ \sigma = -\sigma \circ \tau$, alors \mathcal{T} peut être choisie de sorte à satisfaire à

$$\overline{\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})} = \mathcal{T}(\bar{\widehat{\varepsilon}}).$$

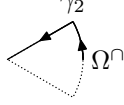
Si $|\tau(\varepsilon)| \leq C|\varepsilon|$ sur Ω_α , alors pour tout $\alpha' < \alpha$, \mathcal{T} est bornée lorsque $\widehat{\varepsilon} \rightarrow 0$ sur $\Omega_{\alpha'}$.

Démonstration. Pour $\arg \widehat{\varepsilon} \in (-\alpha, \frac{3\pi}{2})$, on pose

$$\mathcal{T}_1(\widehat{\varepsilon}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{\tau(\zeta)}{\zeta - \varepsilon} d\zeta,$$



où γ_1 est le contour d'intégration représenté sur l'image. Ensuite, pour $\arg \widehat{\varepsilon} \in (\frac{\pi}{2}, 2\pi + \alpha)$, on pose

$$\mathcal{T}_2(\widehat{\varepsilon}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{\tau(\zeta)}{\zeta - \varepsilon} d\zeta,$$


où γ_2 se trouve sur l'image ci-haut.

Pour $\arg \widehat{\varepsilon} \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, on voit que $\mathcal{T}_1(\widehat{\varepsilon}) = \mathcal{T}_2(\widehat{\varepsilon})$, car

$$\mathcal{T}_2(\widehat{\varepsilon}) - \mathcal{T}_1(\widehat{\varepsilon}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2 - \gamma_1} \frac{\tau(\zeta)}{\zeta - \varepsilon} d\zeta = 0,$$

par le théorème de Cauchy, puisque le contour $\gamma_2 - \gamma_1 = \partial\Omega^\cap$ et l'intégrande est holomorphe sur Ω^\cap . Ainsi, \mathcal{T}_2 permet de prolonger \mathcal{T}_1 sur Ω_α . On appelle \mathcal{T} ce prolongement.

Pour $\varepsilon \in \Omega^\cap$, on a

$$\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon}e^{2i\pi}) - \mathcal{T}(\widehat{\varepsilon}) = \mathcal{T}_2(\widehat{\varepsilon}) - \mathcal{T}_1(\widehat{\varepsilon}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2 - \gamma_1} \frac{\tau(\zeta)}{\zeta - \varepsilon} d\zeta = \tau(\varepsilon)$$

par le théorème des résidus.

Pour la deuxième partie de l'énoncé, avec $\arg \widehat{\varepsilon} \in (-\alpha, \frac{3\pi}{2})$, on a

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})} &= \overline{\mathcal{T}_1(\widehat{\varepsilon})} \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \overline{\int_{\gamma_1} \frac{\tau(\zeta)}{\zeta - \varepsilon} d\zeta} \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{\overline{\tau(\zeta)}}{\overline{\zeta} - \overline{\varepsilon}} d\overline{\zeta} \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{-\tau(\overline{\zeta})}{\overline{\zeta} - \overline{\varepsilon}} d\overline{\zeta} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{\tau(\zeta)}{\zeta - \overline{\varepsilon}} d\zeta \\ &= \mathcal{T}_2(\overline{\widehat{\varepsilon}}) \\ &= \mathcal{T}(\overline{\widehat{\varepsilon}}). \end{aligned}$$

On peut faire le même argument pour les autres valeurs de $\widehat{\varepsilon}$ ou simplement constater que $\overline{\mathcal{T}_1(\cdot)}$ permet un autre prolongement de \mathcal{T}_1 sur Ω_α et par unicité du prolongement, l'équation est vérifiée sur Ω_α .

Enfin, si on suppose que $|\tau(\varepsilon)| \leq C|\varepsilon|$ pour ε petit, alors pour $\arg \widehat{\varepsilon} < \frac{3\pi}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})| &= |\mathcal{T}_1(\widehat{\varepsilon})| \\
&= \left| \int_{\gamma_1} \frac{\tau(\zeta)}{\zeta - \varepsilon} d\zeta \right| \\
&\leq \int_{\gamma_1} \left| \frac{\tau(\zeta)}{\zeta - \varepsilon} \right| |d\zeta| \\
&\leq \int_{\gamma_1} \frac{C|\zeta|}{|\zeta - \varepsilon|} |d\zeta| \\
&\leq C \int_{\gamma_1} \frac{|\zeta - \varepsilon| + |\varepsilon|}{|\zeta - \varepsilon|} |d\zeta| \\
&= CL(\gamma_1) + C|\varepsilon| \int_{\gamma_1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - \varepsilon|} \quad (\text{où } L(\gamma_1) = \text{long. de } \gamma_1).
\end{aligned}$$

Ensuite, pour l'intégrale qui reste, on divise le contour γ_1 en un arc de cercle $A = \{r'e^{-i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \alpha\}$ et un segment de droite $D = \{e^{-i\alpha}t \mid t \in [0, r']\}$ orientés comme indiqué précédemment. On borne les deux intégrales comme suit

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{|d\zeta|}{|\zeta - \varepsilon|} &\leq \int_0^\alpha \frac{r'd\theta}{r' - |\varepsilon|} & \int_D \frac{|d\zeta|}{|\zeta - \varepsilon|} &\leq \int_D \frac{|d\zeta|}{\text{dist}(\varepsilon, D)} \\
&= \frac{r'\alpha}{r' - |\varepsilon|} & &= \frac{r'}{\text{dist}(\varepsilon, D)} \\
& & &= \frac{r'}{\Im(e^{i\alpha}\varepsilon)},
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\gamma_1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - \varepsilon|} \leq \frac{r'\alpha}{r' - |\varepsilon|} + \frac{r'}{\Im(e^{i\alpha}\varepsilon)}.$$

On note que $\Im(e^{i\alpha}\varepsilon) = 0$ si et seulement si $\arg \varepsilon = -\alpha$ ou $\varepsilon = 0$. De plus, on montre que pour n'importe quel $0 < \alpha' < \alpha$ fixé, on a que $\frac{|\varepsilon|}{\Im(e^{i\alpha}\varepsilon)}$ est bornée lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ avec $-\alpha' \leq \arg \varepsilon \leq \alpha'$. En effet, si on pose $e^{i\alpha}\varepsilon = u + iv$, alors on a

$$\begin{aligned}
\frac{|\varepsilon|}{\Im(e^{i\alpha}\varepsilon)} &= \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{v} \\
&= \sqrt{\frac{u^2}{v^2} + 1}
\end{aligned}$$

On a $v \geq \tan(\alpha - \alpha')u$, voir la figure 49, donc on obtient $\frac{|\varepsilon|}{\Im(e^{i\alpha}\varepsilon)} \leq \sqrt{1 + (\tan(\alpha - \alpha'))^{-2}} < \infty$.

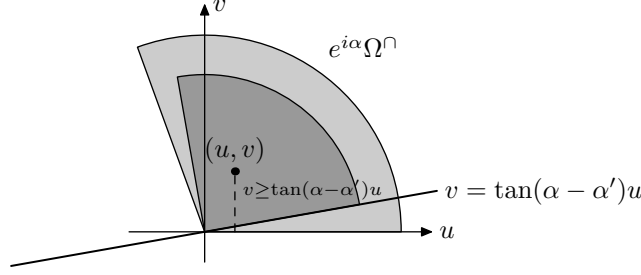


Figure 49. Argument géométrique que $v \geq \tan(\alpha - \alpha')u$.

On conclut que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})| &\leq CL(\gamma_1) + C|\varepsilon| \left(\frac{r'\alpha}{r' - |\varepsilon|} + \frac{r'}{\Im(e^{i\alpha}\varepsilon)} \right) \\
&\leq CL(\gamma_1) + C|\varepsilon| \frac{r'\alpha}{r' - |\varepsilon|} + Cr' \sqrt{1 + (\tan(\alpha - \alpha'))^{-2}} \\
&\longrightarrow CL(\gamma_1) + Cr' \sqrt{1 + (\tan(\alpha - \alpha'))^{-2}},
\end{aligned}$$

lorsque $|\varepsilon| \rightarrow 0$. Le cas où $\arg \widehat{\varepsilon} \geq \frac{3\pi}{2}$ se fait de la même façon. On conclut que $\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})$ est borné lorsque $|\widehat{\varepsilon}| \rightarrow 0^+$ avec $-\alpha' \leq \arg \widehat{\varepsilon} \leq 2\pi + \alpha'$. \square

Tous les outils sont en place pour démontrer le théorème 5.3.1 d'équivalence forte.

Démonstration du théorème 5.3.1. Par le lemme 5.2.8, $f_{1,\varepsilon}$ et $f_{2,\varepsilon}$ possèdent la même classe $[\Psi^L]$ de familles de fonctions de transition du point de vue de Lavaurs. Soit $\{\Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty}\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi,2\pi-\delta}}$ un représentant. Soit $\{\Phi_{j,\widehat{\varepsilon}}^\pm\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi,2\pi-\delta}}$ des coordonnées de Fatou pour $f_{j,\varepsilon}$, $j = 1, 2$, qui sont telles que les fonctions de transition qu'elles définissent sont $\Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L,\infty}$. Selon le corollaire 5.2.6, on peut supposer que les familles $\{\Phi_{j,\widehat{\varepsilon}}^\pm\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi,2\pi-\delta}}$ sont uniquement déterminées par des équations de la forme

$$\overline{\Phi_{j,\widehat{\varepsilon}}^\pm(Z_j^\pm)} + \Phi_{j,\widehat{\varepsilon}}^\pm(Z_j^\pm) = C_j(\widehat{\varepsilon}), \quad (5.3.3)$$

où Z_j^\pm est un point fixé et $C_j \circ \sigma = \sigma \circ C_j$. En particulier, on note que

$$\lim_{\substack{\widehat{\varepsilon} \rightarrow 0 \\ \widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi,2\pi-\delta}}} \Phi_{j,\widehat{\varepsilon}}^\pm = \Phi_{j,0}^\pm \quad (5.3.4)$$

uniformément sur les compacts, par le théorème 5.2.5.

On commence par définir la famille $\{h_{\widehat{\varepsilon}}\}_{\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi,2\pi-\delta}}$ de « conjugaisons » de $f_{1,\widehat{\varepsilon}}$ sur $f_{2,\widehat{\varepsilon}}$, c'est-à-dire une famille qui vérifie

$$f_{2,\widehat{\varepsilon}} = h_{\widehat{\varepsilon}} \circ f_{1,\widehat{\varepsilon}} \circ h_{\widehat{\varepsilon}}^{-1}.$$

Notons que lorsque $\widehat{\varepsilon} = \varepsilon$, $h_{\widehat{\varepsilon}}$ est une vraie conjugaison. L'idée est la même que pour la démonstration du théorème 4.2.12 pour $\varepsilon < 0$: pour chaque $\widehat{\varepsilon}$, on recouvre $D(0, r) \setminus \{\pm\sqrt{\widehat{\varepsilon}}\}$ par deux ouverts $S_{\widehat{\varepsilon}}^\pm$ qui s'intersectent sur trois régions, que l'on appelle $S_{\widehat{\varepsilon}}^\infty$, $S_{\widehat{\varepsilon}}^L$ et $S_{\widehat{\varepsilon}}^0$. Voir

les figures 50 et 52 pour les cas $\widehat{\varepsilon}$ réel positif et $\widehat{\varepsilon}$ réel négatif respectivement. On définit $h_{\widehat{\varepsilon}}$ selon l'équation (5.3.1) et on montre qu'elle est bien définie.

Pour définir $S_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm}$, on choisit une région $R_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm}$ comme sur les figures 51 et 53. Il y a plusieurs choix possibles de régions ; il est suffisant qu'elles satisfassent à :

1. $R_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm}$ est complètement incluse dans une même coordonnée de Fatou $\Phi_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm}$ et contient une bande. Ceci oblige $R_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm}$ à passer entre le trou fondamental et un autre trou, comme pour la construction des domaines de translation ;
2. $R_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm}$ est ouvert et connexe et $S_{\widehat{\varepsilon}}^{+} \cup S_{\widehat{\varepsilon}}^{-}$ recouvrent $D(0, r) \setminus \{\pm\sqrt{\widehat{\varepsilon}}\}$, où $S_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm} := (Z_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm})^{-1} \circ (\Phi_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm})^{-1}(R_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm})$;
3. un voisinage de $R_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm}$ près du trou fondamental reste inchangé pour toutes les valeurs de $\widehat{\varepsilon}$, sauf pour accommoder les changements du trou lui-même. Remarquer les segments verticaux sur la figure 51. Ceci permet de s'assurer que la partie de $S_{\widehat{\varepsilon}}^{0, \infty}$ près de la frontière ne change pas lorsque $\widehat{\varepsilon}$ varie. Autrement, ces régions tourneraient lorsqu'il faudrait incliner $R_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm}$.

Pour chaque valeur de $\widehat{\varepsilon}$, on définit le difféomorphisme $h_{\widehat{\varepsilon}}$ sur $D(0, r)$ par (5.3.1). Il faut montrer que sur $S_{\widehat{\varepsilon}}^{\infty}$, $S_{\widehat{\varepsilon}}^L$ et $S_{\widehat{\varepsilon}}^0$, $h_{\widehat{\varepsilon}}$ est bien définie. Ceci se fait exactement comme dans la démonstration du théorème 4.2.12, en utilisant le fait que $f_{1, \widehat{\varepsilon}}$ et $f_{2, \widehat{\varepsilon}}$ ont la même translation de Lavaurs et la même classe de familles de fonctions de transition du point de vue de Lavaurs. Pour $S_{\widehat{\varepsilon}}^0$ (resp. $S_{\widehat{\varepsilon}}^{\infty}$), voir les calculs de (4.2.27), où l'on remplace Ψ_{ε}^U par $\Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L, 0}$ (resp. $\Psi_{\widehat{\varepsilon}}^{L, \infty}$). Pour $S_{\widehat{\varepsilon}}^L$, voir les calculs de (4.2.28).

Ensuite, on considère $\Omega_{\pi, 2\pi-\delta}^{\cap}$ le secteur d'auto-intersection de $\Omega_{\pi, 2\pi-\delta}$ dans $D(0, r')^*$. On définit γ_{ε} pour $\varepsilon \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}^{\cap}$ par

$$\gamma_{\varepsilon} := h_{\widehat{\varepsilon}}^{-1} \circ h_{\widehat{\varepsilon}e^{2i\pi}}. \quad (5.3.5)$$

Définie ainsi, elle respecte l'équation

$$\gamma_{\widehat{\varepsilon}}^{-1} \circ f_{1, \varepsilon} = f_{1, \varepsilon} \circ \gamma_{\varepsilon}.$$

Par l'équation (5.3.4), il en résulte que γ_{ε} possède la limite $\gamma_{\varepsilon} \rightarrow id$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Par la proposition 5.3.3, si f_{ε} n'est pas plongeable dans un champ sur $\Omega_{\pi, 2\pi-\delta}^{\cap}$ ou si f_0 n'est pas plongeable dans un champ, alors $\gamma_{\varepsilon} = id$ et donc $h_{\widehat{\varepsilon}} = h_{\widehat{\varepsilon}e^{2i\pi}}$. On conclut que $h_{\widehat{\varepsilon}}$ induit un difféomorphisme h_{ε} analytique en ε , pour $\varepsilon \in D(0, r')^*$, qui se prolonge en $\varepsilon = 0$.

Il reste seulement le cas où f_{ε} est plongeable dans un champ sur $\Omega_{\pi, 2\pi-\delta}^{\cap}$. Dans ce cas, on peut supposer sans perte de généralité que $f_{2, \varepsilon} = \sigma \circ v^{\frac{1}{2}}$. Selon l'énoncé 2b) de la proposition 5.3.3, puisque γ_{ε} vérifie la propriété *ii*, il existe une fonction τ holomorphe en ε telle que $\gamma_{\varepsilon} = g_{\varepsilon}^{\tau(\varepsilon)}$ avec $\tau(0) = 0$ et qui satisfait à $\tau \circ \sigma = -\sigma \circ \tau$. Par le théorème 5.3.4, il existe une fonction \mathcal{T} holomorphe en $\widehat{\varepsilon}$ sur $\Omega_{\pi, 2\pi-\delta}$ telle que

$$\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon}e^{2i\pi}) - \mathcal{T}(\widehat{\varepsilon}) = -\tau(\varepsilon)$$

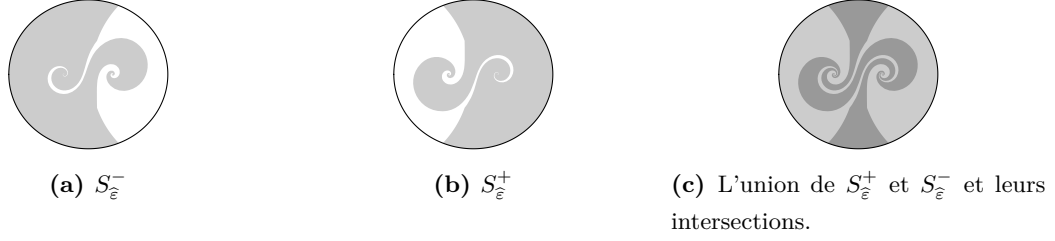


Figure 50. Les deux « secteurs » $S_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm}$ pour $\arg \widehat{\varepsilon} = 0$ et leurs intersections en gris foncé : partant du haut du disque jusqu'à $-\sqrt{\widehat{\varepsilon}}$, $S_{\widehat{\varepsilon}}^{\infty}$; allant de $-\sqrt{\widehat{\varepsilon}}$ à $\sqrt{\widehat{\varepsilon}}$, $S_{\widehat{\varepsilon}}^L$; de $\sqrt{\widehat{\varepsilon}}$ jusqu'au bas du disque, $S_{\widehat{\varepsilon}}^0$.

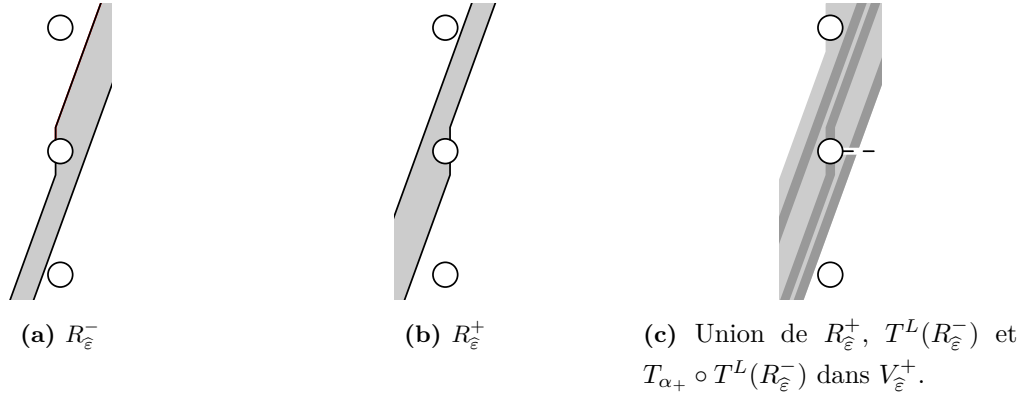


Figure 51. Les deux régions $R_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm}$ qui se projettent sur $S_{\widehat{\varepsilon}}^{\pm}$ et leurs intersections en gris foncé, en utilisant la translation de Lavaurs pour ramener les deux régions sur la même coordonnée de Fatou (la ligne pointillée indique que l'on change de feuille).

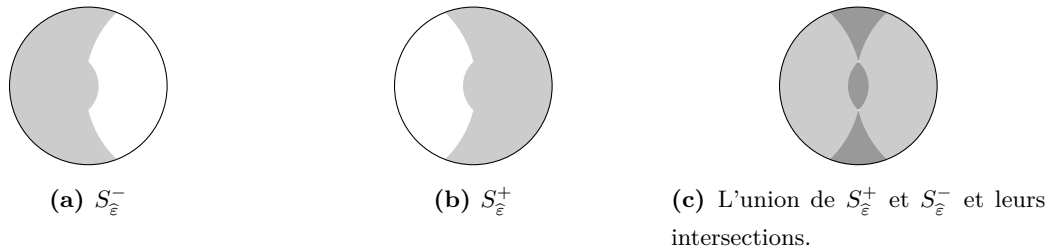


Figure 52. Comme à la figure 50, mais pour $\arg \widehat{\varepsilon} = \pi$.

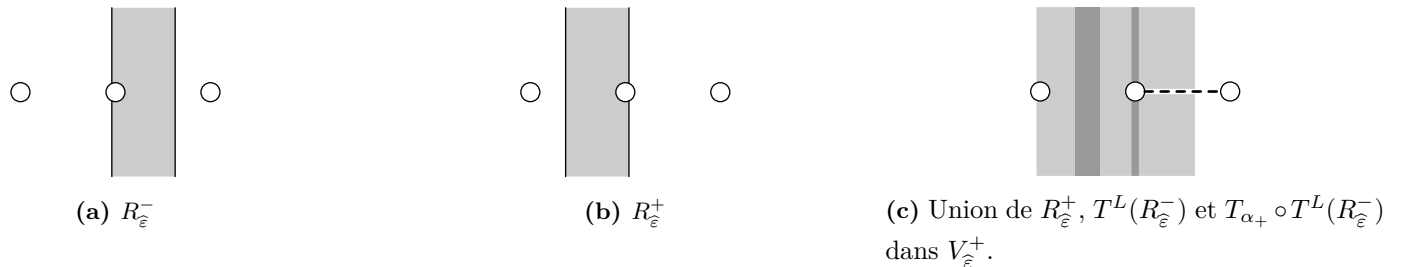


Figure 53. Comme à la figure 51, mais pour $\arg \widehat{\varepsilon} = \pi$.

pour $|\arg \widehat{\varepsilon}| \leq \pi - \delta$ et telle que $\mathcal{T} \circ \sigma = \sigma \circ \mathcal{T}$. Supposons pour le moment que \mathcal{T} est bornée pour $|\widehat{\varepsilon}|$ petit, on le montrera à la fin de la démonstration. On pose $\widetilde{h}_{\widehat{\varepsilon}} := h_{\widehat{\varepsilon}} \circ g_{\varepsilon}^{\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})}$. Il reste à montrer les deux points suivants :

1. $\widetilde{\gamma}_{\varepsilon} = \widetilde{h}_{\widehat{\varepsilon}}^{-1} \circ \widetilde{h}_{\widehat{\varepsilon}e^{2i\pi}} = id$;
2. $g_{\overline{\varepsilon}}^{\mathcal{T}(\overline{\widehat{\varepsilon}})} \circ f_{\varepsilon} = f_{\varepsilon} \circ g_{\varepsilon}^{\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})}$.

Pour montrer le point 1, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}_{\varepsilon} &= \widetilde{h}_{\widehat{\varepsilon}}^{-1} \circ \widetilde{h}_{\widehat{\varepsilon}e^{2i\pi}} \\
&= g_{\varepsilon}^{-\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})} \circ h_{\widehat{\varepsilon}}^{-1} \circ h_{\widehat{\varepsilon}e^{2i\pi}} \circ g_{\varepsilon}^{\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon}e^{2i\pi})} \\
&= g_{\varepsilon}^{-\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})} \circ g_{\varepsilon}^{\mathcal{T}(\varepsilon)} \circ g_{\varepsilon}^{\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon}e^{2i\pi})} \\
&= g_{\varepsilon}^{\mathcal{T}(\varepsilon) + \mathcal{T}(\widehat{\varepsilon}e^{2i\pi}) - \mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})} \\
&= g_{\varepsilon}^0 = id,
\end{aligned}$$

car $\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon}e^{2i\pi}) - \mathcal{T}(\widehat{\varepsilon}) = -\tau(\varepsilon)$.

Enfin, pour montrer le point 2, on a

$$\begin{aligned}
g_{\overline{\varepsilon}}^{\mathcal{T}(\overline{\widehat{\varepsilon}})} \circ f_{\varepsilon} &= f_{\varepsilon}^{\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})} \circ f_{\overline{\varepsilon}}^{\mathcal{T}(\overline{\widehat{\varepsilon}})} \circ f_{\varepsilon} \\
&= f_{\varepsilon}^{\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})} \circ f_{\overline{\varepsilon}} \circ \overline{f_{\varepsilon}^{\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})}} && (\text{car } f_{\overline{\varepsilon}}^{\mathcal{T}(\overline{\widehat{\varepsilon}})} \circ f_{\varepsilon} = f_{\overline{\varepsilon}} \circ \overline{f_{\varepsilon}^{\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})}}) \\
&= f_{\varepsilon} \circ \overline{f_{\overline{\varepsilon}}^{\mathcal{T}(\overline{\widehat{\varepsilon}})}} \circ \overline{f_{\varepsilon}^{\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})}} && (\text{car } f_{\varepsilon}^{\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})} \circ f_{\overline{\varepsilon}} = f_{\varepsilon} \circ \overline{f_{\overline{\varepsilon}}^{\mathcal{T}(\overline{\widehat{\varepsilon}})}}) \\
&= f_{\varepsilon} \circ \overline{g_{\varepsilon}^{\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})}} \\
&= f_{\varepsilon} \circ g_{\varepsilon}^{\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})},
\end{aligned}$$

car $\mathcal{T}(\overline{\widehat{\varepsilon}}) = \overline{\mathcal{T}(\widehat{\varepsilon})}$.

Ainsi, en combinant 1 et 2, on peut définir un difféomorphisme $\widetilde{h}_{\varepsilon}$ sur $D(0, r')^*$ tel que $\widetilde{h}_{\varepsilon} \circ f_{1, \varepsilon} \circ \widetilde{h}_{\varepsilon}^{-1} = f_{2, \varepsilon}$. On peut prolonger $\widetilde{h}_{\varepsilon}$ en $\varepsilon = 0$, car $\widetilde{h}_{\varepsilon}$ est borné sur un voisinage de $\varepsilon = 0$, ce qui suit du fait que \mathcal{T} est borné pour $|\widehat{\varepsilon}|$ petit.

Pour la suite, on appelle Φ_{ε}^{\pm} les coordonnées de Fatou de $f_{1, \varepsilon} = f_{\varepsilon}$. Alors les coordonnées de Fatou de $\sigma \circ v^{\frac{1}{2}}$ sont l'identité.

Il reste à montrer que \mathcal{T} est borné. Ceci suit du théorème 5.3.4 dès qu'on montre que τ est un $O(\varepsilon)$. C'est un point assez technique de la démonstration. Pour ce faire, on fera appel au théorème des accroissements finis appliqué sur γ_{ε} (de l'équation (5.3.5)) dans la coordonnée temps sur chaque rayon $\arg \widehat{\varepsilon} = \text{const}$ d'un petit secteur $\Omega_{0, \beta}$. Ceci permettra

d'obtenir la propriété Lipschitz en τ . Une remarque importante est que, même si γ_ε dépend de z , τ est indépendant de z , et donc sa dépendance en ε peut être étudiée en regardant des valeurs de z particulières (ou plutôt Z , puisqu'on travaillera dans la coordonnée temps).

On écrit $\widehat{\varepsilon} = \rho e^{i\theta}$. On s'intéresse à ρ et on traite θ comme un paramètre supplémentaire pour lequel tout se comporte continûment. Rappelons que $\gamma_{\rho e^{i\theta}}$ devient

$$\Gamma_{\rho e^{i\theta}} = \Phi_{\rho e^{i\theta}}^\pm \circ (\Phi_{\rho e^{i\theta} + 2i\pi}^\pm)^{-1} = T_{\tau(\rho e^{i\theta})} \quad (5.3.6)$$

dans la coordonnée temps. On montrera que

$$|\Gamma(\rho, \theta, Z) - \Gamma(0, \theta, Z)| \leq M\rho, \quad (5.3.7)$$

où $M < \infty$, ce qui permettra d'établir directement que $\tau(\rho e^{i\theta}) = O(\rho e^{i\theta})$, comme on le verra. La difficulté survient lorsqu'on veut montrer que $\frac{\partial}{\partial \rho} \Phi^\pm$ est bornée sur un compact en $(\widehat{\varepsilon}, Z)$ qui contient $\widehat{\varepsilon} = 0$. En effet, on ne sait pas montrer que $\frac{\partial}{\partial \rho} \Phi^\pm$ est continue en $(0, Z)$.

Pour alléger la notation, on omet le \pm et on notera $\Phi_{\rho e^{i\theta}}$ par Φ et $\Phi_{\rho e^{i\theta} + 2i\pi}$ par $\hat{\Phi}$.

Pour montrer l'équation (5.3.7), on utilise la propriété suivante des coordonnées de Fatou. D'abord, on pose

$$\Omega_\lambda := \{\rho e^{i\theta} \mid 0 < \rho < r''_\lambda, \ |2\pi\lambda - \theta| < \beta_\lambda\}, \quad \lambda = 0, 1,$$

pour β_λ et r''_λ à déterminer. Pour $\lambda \in \{0, 1\}$, on a la propriété suivante pour une coordonnée de Fatou $\Phi_{\rho e^{i\theta}}$:

il existe $\beta_\lambda > 0$, $0 < r''_\lambda \leq r'$ et une droite admissible ℓ_λ telle que pour tout compact $K \subset U_{\rho e^{i\theta}}$ qui n'intersecte aucune des courbes ℓ_λ et $G_{\rho e^{i\theta}}^{\circ n}(\ell_\lambda)$, $n \in \mathbb{Z}$ et $\rho e^{i\theta} \in \Omega_\lambda$, on a

$$\sup_{\substack{\rho e^{i\theta} \in \Omega_\lambda \\ Z \in K}} \left| \frac{\partial \Phi_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \rho}(Z) \right| < \infty.$$

On dira dans ce cas que K est un compact admissible. De plus, pour tout compact $K_1 \subset V_{\rho e^{i\theta}} = \Phi_{\rho e^{i\theta}}(U_{\rho e^{i\theta}})$ tel que (5.3.8)

$$K'_1 = \{\Phi_{\rho e^{i\theta}}^{-1}(W) \mid W \in K_1, \ \rho e^{i\theta} \in \Omega_\lambda\}$$

est admissible, on a

$$\sup_{\substack{\rho e^{i\theta} \in \Omega_\lambda \\ W \in K'_1}} \left| \frac{\partial \Phi_{\rho e^{i\theta}}^{-1}}{\partial \rho}(W) \right| < \infty.$$

L'énoncé complet se trouve au théorème 5.3.5 à la prochaine section. Cette propriété se démontre en examinant la construction des coordonnées de Fatou et provient, au final, du fait que $G_{\rho e^{i\theta}}$ est régulière en (ρ, θ, Z) . On peut travailler avec un seul β et r'' , qui sont les minimums respectifs des β_λ et r''_λ . On note par ℓ une droite admissible associée à Φ par

rapport à Ω_0 et par $\hat{\ell}$ une droite admissible associée à $\hat{\Phi}$ (c'est-à-dire associées à Φ par rapport à Ω_1).

On rappelle que le but est d'appliquer le théorème des accroissements finis sur Γ . On devra majorer la dérivée partielle de l'équation (5.3.6) par rapport à ρ . En dérivant en chaîne, on aura des sommes et des produits de dérivées partielles de Φ et $\hat{\Phi}$ par rapport à ρ et à Z . Les dérivées par rapport à Z se comportent bien. On utilisera la propriété (5.3.8) pour majorer les autres dérivées.

On choisit maintenant un compact $\{Z_0\}$, valide pour appliquer la propriété (5.3.8), de la façon suivante. On choisit $\{Z_0\}$ admissible simultanément par rapport à ℓ et à $\hat{\ell}$. S'il est impossible de faire un tel choix, on peut réduire r et r' jusqu'à ce que l'estimé $|G_{\rho e^{i\theta}} - T_1| \leq C_F \max\{r, r'\}$ soit suffisamment petit. En effet, plus $\max\{r, r'\}$ est petit, plus la bande grise interdite sur la figure 54 est petite. (À noter que seules les bandes pour ℓ et $\hat{\ell}$ sont représentées sur la figure.)

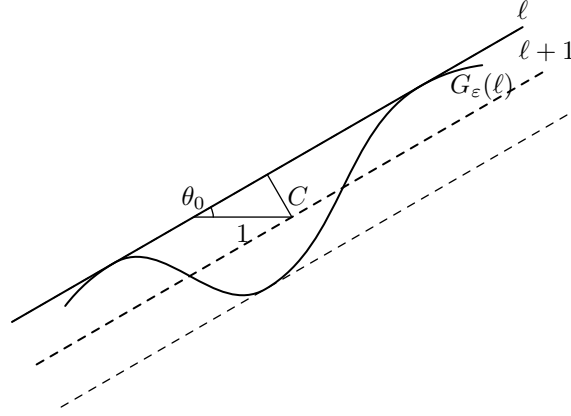


Figure 54. Représentation de ℓ , ainsi que les bandes qui contiennent toutes les courbes $G_{\rho e^{i\theta}}(\ell)$ pour $\rho e^{i\theta} \in \Omega_\lambda$. (La figure pour $\hat{\ell}$ est similaire, mais avec une droite de pente négative.)

On pose

$$K_1 = \{\hat{\Phi}_1^{-1}(W) \mid W \in K_1, \rho e^{i\theta} \in \overline{\Omega_0}\},$$

$$K_2 = \{\Phi_1(Z) \mid Z \in K_1, \rho e^{i\theta} \in \overline{\Omega_0}\}.$$

Ces ensembles sont tous compacts, puisqu'ils sont l'image de compacts par des homéomorphismes. Il faut s'assurer que K_2 soit admissible. On peut réduire r' pour diminuer la largeur des bandes interdites et on peut réduire r'' et β pour diminuer la taille de K_2 . Puisque Φ et $\hat{\Phi}$ sont continues, on est assuré qu'il existe des r, r', r'' et β assez petits pour que K_2 soit admissible. On peut donc appliquer la propriété (5.3.8) pour obtenir

$$\sup_{\rho e^{i\theta} \in \Omega_0} \left| \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \rho}(Z_0) \right| < \infty, \quad \sup_{\rho e^{i\theta} \in \Omega_0} \left| \frac{\partial \hat{\Phi}^{-1}}{\partial \rho}(Z_0) \right| < \infty.$$

On peut finalement conclure que la dérivée partielle par rapport à ρ de $\Gamma(Z_0)$ est bornée sur Ω_0 par un certain M . On applique le théorème des accroissements finis en ρ pour chaque θ pour obtenir

$$\begin{aligned} |\Gamma(\rho, \theta, Z_0) - \Gamma(0, \theta, Z_0)| &= \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho}(\xi(\theta), \theta, Z_0) \right| \rho \\ &\leq M\rho. \end{aligned}$$

Pour conclure, on a

$$\begin{aligned} M\rho &= M|\varepsilon| \\ &\geq |\Gamma(\rho, \theta, Z) - \Gamma(0, \theta, Z)| \\ &= |T_{\tau(\varepsilon)}(Z) - T_{\tau(0)}(Z)| \\ &= |Z + \tau(\varepsilon) - Z - \tau(0)| \\ &= |\tau(\varepsilon)|, \end{aligned}$$

pour tout $\rho \leq r''$, comme voulu. On note que $\tau(0) = 0$, puisque $\gamma_\varepsilon \rightarrow id$, comme il a été montré. \square

5.3.2. Notes additionnelles sur la dépendance des paramètres des coordonnées de Fatou

On rappelle que f_ε est une déformation de f_0 , un germe antiholomorphe parabolique de codimension 1, et que l'on considère un représentant de la déformation que l'on note aussi f_ε qui est antiholomorphe sur le bi-disque $D(0, r') \times D(0, r)$ en (ε, z) . Quitte à se restreindre à un bi-disque fermé plus petit, on suppose que f est antiholomorphe sur un domaine qui contient $\overline{D(0, r')} \times \overline{D(0, r)}$.

On utilisera la notation suivante pour toute la section :

$$\Omega_\lambda := \{\widehat{\varepsilon} : 0 < |\widehat{\varepsilon}| < r'', \quad |2\pi\lambda - \arg \widehat{\varepsilon}| < \beta\}, \quad \lambda = 0, 1, \quad (5.3.9)$$

où r'' et β seront déterminés dans ce qui suit. Notons que le prochain théorème pourrait s'énoncer de façon plus générale sur un secteur $\Omega_{\theta_0, \beta_{\theta_0}}$ (voir l'équation (5.2.3)), pour β_{θ_0} assez petit, mais on utilisera seulement les cas $\theta_0 = 0$ ou 2π .

On veut montrer le résultat suivant.

Théorème 5.3.5. *Soit $\{\Phi_{\widehat{\varepsilon}}\}_{\widehat{\varepsilon}}$ la famille de coordonnées de Fatou de f_ε déterminée par*

$$\overline{\Phi_{\widehat{\varepsilon}}(Z_1)} + \Phi_{\widehat{\varepsilon}}(Z_1) = 0,$$

où Z_1 est un point fixé pour tout $\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}$. On remplace $\widehat{\varepsilon}$ par (ρ, θ) , où $\widehat{\varepsilon} = \rho e^{i\theta}$. Alors il existe $\beta > 0$, $0 < r'' \leq r'$ et une droite ℓ_λ ($\lambda = 0, 1$) tels que pour tout $\lambda \in \{0, 1\}$ et pour tout compact K qui n'intersecte aucune des courbes¹ ℓ_λ et $G_{\rho e^{i\theta}}^{\text{on}}(\ell_\lambda)$ pour $\rho e^{i\theta} \in \overline{\Omega_\lambda}$ et $n \in \mathbb{Z}$, il existe une constante $C_{K, \lambda}$ telle que

$$\left| \frac{\partial(\Phi_{\rho e^{i\theta}})^{-1}}{\partial \rho} \circ \Phi_{\rho e^{i\theta}}(Z) \right|, \left| \frac{\partial \Phi_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \rho}(Z) \right| \leq C_{K, \lambda} < \infty$$

pour tout $Z \in K$ et $\rho e^{i\theta} \in \Omega_\lambda$.

De plus, si $K' \subseteq V_{\rho e^{i\theta}} = \Phi_{\rho e^{i\theta}}(U_{\rho e^{i\theta}})$ est un compact tel que

$$K'' = \{\Phi_{\rho e^{i\theta}}^{-1}(W) \mid W \in K', \rho e^{i\theta} \in \Omega_\lambda\},$$

alors on a

$$\sup_{\substack{\rho e^{i\theta} \in \Omega_\lambda \\ W \in K'}} \left| \frac{\partial \Phi_{\rho e^{i\theta}}^{-1}}{\partial \rho}(W) \right| \leq \sup_{\substack{\rho e^{i\theta} \in \Omega_\lambda \\ Z \in K''}} \left| \frac{\partial \Phi_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \rho}(Z) \right| < \infty.$$

On divise la démonstration du théorème en plusieurs lemmes.

Lemme 5.3.6. On fixe $\delta > 0$, c'est-à-dire qu'on fixe l'ouverture de $\Omega_{\pi, 2\pi-\delta}$. On suppose que r et r' sont suffisamment petits pour que la condition suivante soit satisfaite : pour tout $\theta \in [-\pi + \delta, 3\pi - \delta]$, il existe une droite admissible pour $\rho \leq r'$. Alors il existe $\beta > 0$ et $0 < r'' \leq r'$ et pour chaque $\lambda \in \{0, 1\}$, il existe une droite ℓ_λ de chaque côté du trou fondamental qui est admissible pour tout $\rho e^{i\theta}$ dans le secteur Ω_λ .

Démonstration. Il suffit de faire la preuve pour un côté du trou. On choisit d'abord une droite admissible dans le cas où $\widehat{\varepsilon} = 0$ de la manière suivante. Soit

$$\eta_\lambda = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{si } \lambda = 0; \\ \frac{3\pi}{4}, & \text{si } \lambda = 1; \end{cases}$$

et Z_λ un point tel que distance entre Z_λ et le trou est au moins 2 dans la direction perpendiculaire à η_λ . Soit ℓ_λ la droite qui passe par Z_λ avec un angle η_λ . Cette droite reste admissible pour $\rho \leq r''_\lambda$, si r''_λ est assez petit, car les trous sont loin les uns des autres, et pour $\theta \in [2\pi\lambda - \beta, 2\pi\lambda + \beta]$, où β est assez petit, par continuité de la position des trous. (En fait, on trouve β_0, β_1 et r''_0, r''_1 et on prend pour chaque pair le minimum entre les deux.) \square

Pour la suite, on omet l'indice λ , car les résultats suivants s'appliquent sur Ω_0 et Ω_1 . Ainsi, on utilisera simplement Ω pour désigner l'un des deux secteurs et ℓ pour désigner la droite correspondante d'un des côtés du trou fondamental.

On doit revenir à la construction des coordonnées de Fatou. Soit ℓ et β comme dans le lemme précédent et soit η l'angle de la pente de ℓ et $Z_1 \in \ell$, un point. Soit

$$\mathcal{B} = \{0 \leq X \leq 1, Y \in \mathbb{R}\} \tag{5.3.10}$$

1. Pour préciser, lorsque l'on parle des « courbes $G_{\rho e^{i\theta}}^{\text{on}}(\ell_\lambda)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ », on entend l'ensemble des points $G_{\rho e^{i\theta}}^{\text{on}}(Z)$ pour $Z \in \ell$ et pour les $n \in \mathbb{Z}$ pour lesquels la composition est définie.

la bande fermée de largeur 1 et soit \mathcal{B}_ℓ la région fermée comprise entre ℓ et $G_{\rho e^{i\theta}}(\ell)$. Soit $k_{\rho e^{i\theta}}$ l'homéomorphisme entre \mathcal{B}_ℓ et \mathcal{B} dont l'inverse est donné par

$$k_{\rho e^{i\theta}}^{-1}(W) = (1 - X)(e^{i\eta}Y + Z_1) + XG_{\rho e^{i\theta}}(e^{i\eta}Y + Z_1), \quad (5.3.11)$$

où $W = X + iY$.

Pour démontrer le théorème 5.3.5, on fera appel aux lemmes suivants. Puisque leurs démonstrations sont techniques et ne sont pas utiles à la démonstration du théorème, elles sont repoussées à la fin de la section.

Lemme 5.3.7. $k_{\rho e^{i\theta}}$ est de classe C^2 sur $\overline{\Omega} \times \mathcal{B}_\ell$.

Lemme 5.3.8. Soit $\nu_{\rho e^{i\theta}}$ le coefficient de dilatation complexe de $k_{\rho e^{i\theta}}^{-1} \circ E^{-1}$. Soit $m_{\rho e^{i\theta}}$ la solution normale à l'équation de Beltrami par rapport à $\nu_{\rho e^{i\theta}}$. Pour tout compact K , on a

$$\sup_{\substack{\rho e^{i\theta} \in \Omega \\ w \in E(K)}} \left| \frac{\partial m_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \rho}(w) \right| = \sup_{\substack{\rho e^{i\theta} \in \Omega \\ W \in K}} \left| \frac{\partial m_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \rho} \circ E(W) \right| < \infty.$$

Lemme 5.3.9. Sous les mêmes hypothèses que le lemme précédent, pour tout compact K , il existe C_K telle que

$$\left| \frac{\partial m_{\rho e^{i\theta}}}{\partial w} \right|, \left| \frac{\partial m_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \bar{w}} \right| \leq C_K < \infty$$

pour tout $w \in E(K)$ et tout $\rho e^{i\theta} \in \overline{\Omega}$.

Démonstration du théorème 5.3.5. Sur le secteur $\overline{\Omega}$, on a une coordonnée de Fatou donnée par

$$\Phi_{\rho e^{i\theta}}(Z) = E^{-1} \circ m_{\rho e^{i\theta}} \circ E \circ k_{\rho e^{i\theta}}.$$

En dérivant, on trouve (on omet l'indice $\rho e^{i\theta}$ pour alléger l'équation)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}(Z) = (E^{-1})' \cdot \left(\frac{\partial m}{\partial \rho} + \frac{\partial m}{\partial w} \frac{dE}{dZ} \frac{\partial k}{\partial \rho} + \frac{\partial m}{\partial \bar{w}} \frac{d\bar{E}}{dZ} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \rho} \right).$$

Dans un premier temps, soit $K \subset U_{\rho e^{i\theta}}$ un compact qui n'intersecte aucune des courbes ℓ et $G_{\rho e^{i\theta}}^{on}(\ell)$ pour $\rho e^{i\theta} \in \overline{\Omega}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, le compact

$$K_k = \{k_{\rho e^{i\theta}}(Z) \mid Z \in K, \rho e^{i\theta} \in \overline{\Omega}\}$$

ne touche pas aux droites $\ell + n$, $n \in \mathbb{Z}$. Par le lemme 5.3.8, on majore $\frac{\partial}{\partial \rho} m_{\rho e^{i\theta}}$ par

$$\sup_{\substack{\rho e^{i\theta} \in \Omega \\ Z \in K}} \left| \frac{\partial m_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \rho} \circ E \circ k_{\rho e^{i\theta}}(Z) \right| \leq \sup_{\substack{\rho e^{i\theta} \in \Omega \\ W \in K_k}} \left| \frac{\partial m_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \rho} \circ E(W) \right| < \infty.$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial w} m_{\rho e^{i\theta}}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{w}} m_{\rho e^{i\theta}}$ sont majorées de la même façon avec le lemme 5.3.9. Enfin, la dérivée partielle de $k_{\rho e^{i\theta}}$ par rapport à ρ est majorée sur K et $\overline{\Omega}$ par le lemme 5.3.7. On conclut que $\frac{\partial}{\partial \rho} \Phi$ est majorée sur $K \times \overline{\Omega}$.

Ensuite, en dérivant $\Phi_{\rho e^{i\theta}} \circ \Phi_{\rho e^{i\theta}}^{-1}(W) = W$ par rapport à ρ , on trouve

$$\frac{\partial \Phi_{\rho e^{i\theta}}^{-1}}{\partial \rho}(W) = -\frac{\partial \Phi_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \rho} \circ \Phi_{\rho e^{i\theta}}^{-1}(W) \Big/ \frac{\partial \Phi_{\rho e^{i\theta}}}{\partial Z} \circ \Phi_{\rho e^{i\theta}}^{-1}(W).$$

On remarque que $\frac{\partial}{\partial Z} \Phi_{\rho e^{i\theta}}$ n'est jamais nul et se comporte bien par rapport à $\rho e^{i\theta}$ et Z . On peut donc supposer que le dénominateur est minoré par M .

Soit K' un compact qui est tel que

$$K'' = \{\Phi_{\rho e^{i\theta}}^{-1}(W) \mid W \in K', \rho e^{i\theta} \in \Omega\}$$

n'intersecte aucune des droites ℓ et $G_{\rho e^{i\theta}}^{\text{on}}(\ell)$ pour $\rho e^{i\theta} \in \Omega$ et $n \in \mathbb{Z}$ (c'est-à-dire que K' est tel que dans l'énoncé du théorème). On obtient la majoration suivante

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{\rho e^{i\theta} \in \Omega \\ W \in K'}} \left| \frac{\partial \Phi_{\rho e^{i\theta}}^{-1}}{\partial \rho}(W) \right| &= \sup_{\substack{\rho e^{i\theta} \in \Omega \\ W \in K'}} \left| \frac{\partial \Phi_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \rho} \circ \Phi_{\rho e^{i\theta}}^{-1}(W) \Big/ \frac{\partial \Phi_{\rho e^{i\theta}}}{\partial Z} \circ \Phi_{\rho e^{i\theta}}^{-1}(W) \right| \\ &\leq M^{-1} \sup_{\substack{\rho e^{i\theta} \in \Omega \\ W \in K'}} \left| \frac{\partial \Phi_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \rho} \circ \Phi_{\rho e^{i\theta}}^{-1}(W) \right| \\ &\leq M^{-1} \sup_{\substack{\rho e^{i\theta} \in \Omega \\ Z \in K''}} \left| \frac{\partial \Phi_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \rho}(Z) \right| < \infty. \end{aligned}$$

On remarque que la droite ℓ associée à une coordonnée de Fatou n'est pas unique. On peut bouger cette droite. Pour un compact général, on le regarde comme une réunion de compact suffisamment petits. Pour chacun, on choisit une droite ℓ générant la coordonnée de Fatou et satisfaisant à l'hypothèse. \square

Pour la démonstration des lemmes, on introduit la notation suivante pour le reste de la section :

$$\mathcal{W} := (Y e^{i\eta_0} + Z_0); \tag{5.3.12}$$

$$\begin{aligned} A &:= \frac{\partial k_{\rho e^{i\theta}}^{-1}}{\partial X} = -\mathcal{W} + G_{\rho e^{i\theta}}(\mathcal{W}); & A_\rho &:= \frac{\partial^2 k_{\rho e^{i\theta}}^{-1}}{\partial \rho \partial X} = \frac{\partial G_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \rho}(\mathcal{W}); \\ B &:= \frac{\partial k_{\rho e^{i\theta}}^{-1}}{\partial Y} = e^{i\eta_0}(1 - X) + e^{i\eta_0} X \frac{\partial G_{\rho e^{i\theta}}}{\partial Z}(\mathcal{W}); & B_\rho &:= \frac{\partial^2 k_{\rho e^{i\theta}}^{-1}}{\partial \rho \partial Y} = e^{i\eta_0} X \frac{\partial^2 G_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \rho \partial Z}(\mathcal{W}). \end{aligned}$$

De plus, on a les estimés suivants, par le lemme 4.1.2,

$$|A - 1| \leq C_3 := 2C_1 \quad \text{et} \quad B = i e^{i\eta_0} + i v, \text{ où } |v| \leq C_4 := 2C_2 + C_2^2,$$

où $C_1 = C_F \max\{r, r'\}$ et $C_2 = C'_F \max\{r^2, r'\}$, pour deux constantes $C_F, C'_F \geq 0$. On supposera que r et r' sont assez petits pour que $C_j \leq C$, $j = 3, 4$, où C est telle que

$$1 - 2\sqrt{2}C > 0. \quad (5.3.13)$$

On note aussi que $G_\varepsilon(Z) - Z$ est holomorphe en (ε, z) , car on a

$$G_\varepsilon(Z) - Z = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \log \left(\frac{1 + (z + \sqrt{\varepsilon})R(\varepsilon, z)}{1 + (z - \sqrt{\varepsilon})R(\varepsilon, z)} \right) + \frac{b}{2} \log (1 + 2z + (z^2 - \varepsilon)R(\varepsilon, z)), \quad (5.3.14)$$

où R est le reste dans $g_\varepsilon(z) = z + (z^2 - \varepsilon)R(\varepsilon, z)$. (Voir le lemme 4.1.2, où l'on fait les détails pour F_ε .) Il s'ensuit que toutes les dérivées partielles de $G_\varepsilon(Z) - Z$ sont majorées sur $\overline{D(0, r')} \times \overline{D(0, r)}$, car $\frac{dz}{dZ} = \frac{z^2 - \varepsilon}{1 + bz}$, donc on a

$$|A_\rho| \leq C_5 < \infty \quad \text{et} \quad |B_\rho| \leq C_6 < \infty.$$

Démonstration du lemme 5.3.7. Si on dérive $k_{\rho e^{i\theta}} \circ k_{\rho e^{i\theta}}^{-1}(W) = W$, en réarrangeant les termes, on trouve (on omet les indices pour alléger)

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial \rho} \circ k^{-1} &= -\frac{\partial k}{\partial Z} \circ k^{-1} \frac{\partial k^{-1}}{\partial \rho} - \frac{\partial k}{\partial \bar{Z}} \circ k^{-1} \frac{\overline{\partial k^{-1}}}{\partial \rho} \\ &= -J^{-1} \frac{\overline{\partial k^{-1}}}{\partial \bar{W}} \frac{\partial k^{-1}}{\partial \rho} + J^{-1} \frac{\partial k^{-1}}{\partial \bar{W}} \frac{\overline{\partial k^{-1}}}{\partial \rho}, \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

où on a utilisé les relations ([1])

$$\frac{\partial k_{\rho e^{i\theta}}}{\partial Z} \circ k_{\rho e^{i\theta}}^{-1} = J^{-1} \frac{\overline{\partial k_{\rho e^{i\theta}}^{-1}}}{\partial \bar{W}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial k_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \bar{Z}} \circ k_{\rho e^{i\theta}}^{-1} = -J^{-1} \frac{\partial k_{\rho e^{i\theta}}^{-1}}{\partial \bar{W}}$$

et où J est la jacobienne donnée par

$$\begin{aligned} J &= \left| \frac{\partial k_{\rho e^{i\theta}}^{-1}}{\partial W} \right|^2 - \left| \frac{\partial k_{\rho e^{i\theta}}^{-1}}{\partial \bar{W}} \right|^2 \\ &= |A - iB|^2 - |A + iB|^2. \end{aligned}$$

Si on montre que J est non nulle, alors on aura que $\frac{\partial}{\partial \rho} k_{\rho e^{i\theta}}$ est bien définie et continue.

On note que $|1 - ie^{i\eta_0}|^2 = 2 + 2\sin(\eta_0) \geq 2$. Ensuite, on rappelle que $|A - 1| \leq C$ et $B = ie^{i\eta_0} + iv$, où $|v| \leq C$. On obtient donc

$$\begin{aligned} |A - iB| &= |1 + (A - 1) - ie^{i\eta_0} + iv| \\ &\geq |1 - ie^{i\eta_0}| - |(A - 1) + iv| \\ &\geq \sqrt{2} - 2C \\ &= \sqrt{2}(1 - \sqrt{2}C) > 0 \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

qui est strictement positif car C satisfait à (5.3.13). On a enfin

$$\begin{aligned} J &= |A - iB|^2 - |A + iB|^2 \\ &\geq 2(1 - \sqrt{2}C)^2 - 4C^2 \\ &= 2 - 4\sqrt{2}C + 4C^2 - 4C^2 \\ &= 2(1 - 2\sqrt{2}C) > 0, \end{aligned}$$

car C satisfait à (5.3.13).

On voit à la ligne (5.3.15) que le côté droit est de classe C^1 , donc $k_{\rho e^{i\theta}}$ est de classe C^2 . \square

Pour démontrer le lemme 5.3.8, on utilisera le théorème suivant sur la dépendance des paramètres des solutions de l'équation de Beltrami. On ne fera pas la démonstration du théorème, mais elle se trouve dans [1] (théorème 5).

Théorème 5.3.10 ([1]). *Soit $\nu_{\rho e^{i\theta}} : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable telle que $\|\nu_{\rho e^{i\theta}}\| \leq k < 1$. Soit $m_{\rho e^{i\theta}}$ la solution normale à l'équation de Beltrami associée à $\nu_{\rho e^{i\theta}}$. On utilise la notation $\nu(\rho, \theta)(w) = \nu_{\rho e^{i\theta}}(w)$. Si en (ρ, θ) , il existe $\nu'(\rho, \theta) \in L^\infty$ telle que*

$$\nu(\rho + s, \theta) = \nu(\rho, \theta) + s\nu'(\rho, \theta) + sQ(\rho, \theta, s),$$

où $Q(\rho, \theta, s) \in L^\infty$ et $\|Q(\rho, \theta, s)\|_\infty \rightarrow 0$ lorsque $s \rightarrow 0$, alors $m_{\rho e^{i\theta}}$ est dérivable par rapport à ρ en (ρ, θ) et sa dérivée est donnée par

$$\frac{\partial m_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \rho}(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \nu'_{\rho e^{i\theta}}(\zeta) P(m_{\rho e^{i\theta}}(\zeta), m_{\rho e^{i\theta}}(w)) \left(\frac{\partial m_{\rho e^{i\theta}}}{\partial w}(\zeta) \right)^2 d\zeta d\bar{\zeta}, \quad (5.3.17)$$

où

$$P(\zeta, w) = \frac{1}{\zeta - w} - \frac{w}{\zeta - 1} + \frac{w - 1}{\zeta} = \frac{w(w - 1)}{\zeta(\zeta - 1)(\zeta - w)}. \quad (5.3.18)$$

On aura besoin d'un peu plus. Le corollaire suivant n'est pas énoncé comme tel dans [1], mais on peut adapter l'argument qui y est présenté pour obtenir l'énoncé suivant. La démonstration se trouve à l'annexe B.

Corollaire 5.3.11. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, si ν' est continue par rapport à (ρ, θ) dans L^∞ , alors $\frac{\partial}{\partial \rho} m_{\rho e^{i\theta}}$ est continue en (ρ, θ, w) .*

On énonce le lemme suivant afin d'utiliser le théorème 5.3.10.

Lemme 5.3.12. *Soit $\mu_{\rho e^{i\theta}}$ le coefficient de dilatation complexe de $k_{\rho e^{i\theta}}^{-1}$. Alors $\mu_{\rho e^{i\theta}}$ est se prolonge en ρ sur $(-r', r')$ et est continûment dérivable deux fois par rapport à ρ .*

De plus, $\frac{\partial}{\partial \rho} \mu_{\rho e^{i\theta}}$ est Lipschitz en ρ sur $(-r', r') \times (-\beta, \beta) \times \mathcal{B}$, où \mathcal{B} est défini en (5.3.10). En particulier, pour chaque $\rho \in (-r', r')$, la limite

$$\frac{\partial \mu_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \rho} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu_{(\rho+s)e^{i\theta}} - \mu_{\rho e^{i\theta}}}{s} \quad (5.3.19)$$

converge dans $L^\infty(\mathcal{B})$ comme fonction de $W \in \mathcal{B}$.

Démonstration. Pour voir que $\mu_{\rho e^{i\theta}}$ se prolonge en ρ sur $(-r', r')$, il suffit de constater que $G_{\rho e^{i\theta}}$ se prolonge dans l'équation (5.3.14), donc $k_{\rho e^{i\theta}}^{-1}$ se prolonge aussi, où $k_{\rho e^{i\theta}}^{-1}$ est donnée par l'équation (5.3.11).

Pour voir que $\mu_{\rho e^{i\theta}}$ est continûment dérivable deux fois par rapport à ρ , on vérifie directement par calcul. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial k_{\rho e^{i\theta}}^{-1}}{\partial \bar{Z}} \middle/ \frac{\partial k_{\rho e^{i\theta}}^{-1}}{\partial Z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{(A + iB)}{(A - iB)} \quad (\text{où } A, B \text{ sont définies à (5.3.12)}) \\ &= \frac{(A_\rho + iB_\rho)(A - iB) - (A + iB)(A_\rho - iB_\rho)}{(A - iB)^2}. \end{aligned}$$

Le dénominateur est nul, puisqu'il satisfait à $|A - iB| \geq \sqrt{2}(1 - \sqrt{2}) > 0$ (voir les équations (5.3.16)) et les termes A , B , A_ρ et B_ρ sont tous continûment dérivables par rapport à ρ .

Ensuite, pour la dérivée seconde, on peut écrire

$$\frac{\partial^2 \mu_{\rho e^{i\theta}}}{\partial \rho^2} = \frac{P(A, B, A_\rho, B_\rho, A_{\rho\rho}, B_{\rho\rho})}{(A - iB)^4},$$

où P est un polynôme à six variables. Puisque $A, B, A_\rho, B_\rho, A_{\rho\rho}, B_{\rho\rho}$ sont toutes majorées sur $[-r', r'] \times [-\beta, \beta] \times \mathcal{B}$ et que le dénominateur est non nul, il s'ensuit que $\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \mu_{\rho e^{i\theta}}$ est majorée, disons par C_μ . Par le théorème des accroissements finis, on a

$$\left| \frac{\partial \mu}{\partial \rho}(\rho_1, \theta, W) - \frac{\partial \mu}{\partial \rho}(\rho_0, \theta, W) \right| \leq \sup_{\rho \in (-r', r')} \left| \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2}(\rho, \theta, W) \right| |\rho_1 - \rho_0| \leq C_\mu |\rho_1 - \rho_0|,$$

Ainsi, il suit que

$$\left\| \frac{\partial \mu}{\partial \rho}(\rho_1, \theta, \cdot) - \frac{\partial \mu}{\partial \rho}(\rho_0, \theta, \cdot) \right\|_\infty \leq C_\mu |\rho_1 - \rho_0|.$$

Pour obtenir la limite (5.3.19), encore par le théorème des accroissements finis, pour tout $s > 0$ petit, il existe $\xi \in (\rho, \rho + s)$ tel que

$$\left\| \frac{\mu(\rho + s, \theta, \cdot) - \mu(\rho, \theta, \cdot)}{s} - \frac{\partial \mu}{\partial \rho}(\rho, \theta, \cdot) \right\|_\infty \leq \max_{\xi \in (\rho, \rho + s]} \left\| \frac{\partial \mu}{\partial \rho}(\xi, \theta, \cdot) - \frac{\partial \mu}{\partial \rho}(\rho, \theta, \cdot) \right\|_\infty \leq C_\mu |s|. \quad (5.3.20)$$

Lorsque $s \rightarrow 0^+$, la ligne (5.3.20) tend vers 0. On peut faire le même argument pour $s < 0$. \square

Démonstration du lemme 5.3.8. On a la relation ([1])

$$\nu_{\rho e^{i\theta}}(w) = \frac{\overline{(E^{-1})'}}{(E^{-1})'}(w) \cdot \mu_{\rho e^{i\theta}} \circ E^{-1}(w),$$

pour $w \in \mathbb{C}^*$. Par le lemme 5.3.12, $\frac{\partial}{\partial \rho} \nu_{\rho e^{i\theta}}$ existe dans $L^\infty(S^2)$ (mais n'est pas nécessairement continue en w à cause de E^{-1}) et est continue en (ρ, θ) . Par le théorème 5.3.10 et le corollaire 5.3.11, $m_{\rho e^{i\theta}}$ est dérivable en $\rho \in (-r', r')$ et $\frac{\partial}{\partial \rho} m_{\rho e^{i\theta}}$ est continue en (ρ, θ, w) . On conclut donc que $\frac{\partial}{\partial \rho} m_{\rho e^{i\theta}}$ est bornée sur un compact en (ρ, θ, w) . \square

Démonstration du lemme 5.3.9. Soit K un compact entre ℓ et $\ell + 1$ qui n'inclut pas ces droites. Restreint à ce compact, E est un difféomorphisme, donc on peut réécrire la dérivée de $m_{\rho e^{i\theta}}$ par rapport à w comme étant

$$\frac{\partial m_{\rho e^{i\theta}}}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w} E \circ \Phi_{\rho e^{i\theta}} \circ k_{\rho e^{i\theta}}^{-1} \circ E^{-1}.$$

On voit que le côté droit est continu en (ρ, θ, w) sur $\overline{\Omega} \times K$. Il s'ensuit que $\frac{\partial}{\partial w} m_{\rho e^{i\theta}}$ est bornée sur $\overline{\Omega} \times E(K)$. Le même argument fonctionne pour $\frac{\partial}{\partial \bar{w}} m_{\rho e^{i\theta}}$. \square

Conclusion

Au chapitre 2, on a obtenu un module de classification complet qui permet d'établir si deux germes antiholomorphes paraboliques sont équivalents et on a établie l'espace des modules. On a également obtenu une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une racine antiholomorphe. Au chapitre 4, le module de classification a été déployé, ce qui a permis d'établir si deux déformations d'un germe antiholomorphe parabolique de codimension 1 sont équivalentes. Ainsi, on espère que la réalisation pour les déformations est à portée de main.

La réalisation pour les déformations d'un germe holomorphe parabolique de codimension 1 a été établie dans [6]. La réalisation est plus difficile pour les déformations du fait que le module n'est pas continue en ε . Ceci entraîne comme pour l'équivalence forte, un problème de recollement, mais contrairement à l'équivalence forte, il n'y a pas de recollement à coup sûr, autrement dit ce ne sont pas tous les déploiements d'un module qui admettent une déformation qui le réalise par une famille dépendant de manière réelle analytique du paramètre.

Pour le cas antiholomorphe, ceci est une avenue à explorer. Une approche possible est de ramener le problème au cas holomorphe et d'utiliser les théorèmes déjà connus. Plus précisément, si l'on considère un triplet $(\varepsilon, b, [\Psi])$ appartenant à un espace de module à préciser, on peut obtenir un triplet qui correspond à un module dans le cas holomorphe. Le paramètre canonique est complexifié, l'invariant formel reste tel quel et l'invariant géométrique permet d'obtenir les deux classes de familles de fonctions de transition de Lavaurs $[\Psi^{0,\infty}]$ et une classe de famille de fonctions de transition de Glutsyuk $[\Psi^G]$. Dans [6], il est montré que ce module pour le cas holomorphe est réalisé si les classes $[\Psi^{0,\infty}]$ et $[\Psi^G]$ satisfont à une condition de compatibilité. On émet la conjecture suivante.

Conjecture 1. Soit $(\varepsilon, b, [\Psi])$ un module de classification. Si le module de classification du cas holomorphe associé satisfait à la condition de compatibilité de [6], alors il existe un germe g holomorphe en (ε, z) et un germe f antiholomorphe en (ε, z) tel que $f_{\bar{\varepsilon}} \circ f_{\varepsilon} = g_{\varepsilon}$ et tel que le module de f_{ε} est $(\varepsilon, b, [\Psi])$.

Ensuite, il serait intéressant d'étudier les déploiements génériques des germes antiholomorphes paraboliques de codimension supérieure. La première étape consisterait à définir ce que signifie « génériques ». La deuxième étape serait de trouver une forme normale et de voir s'il existe des paramètres canoniques en nombre égal à la codimension. La conjecture suivante semble naturelle.

Question 8. Quel est le nombre minimal de paramètres réels d'une famille générique déployant une singularité de codimension k ? Et peut-on trouver des paramètres canoniques?

Une partie de la difficulté en codimension supérieure provient du fait qu'il n'y a probablement pas d'expression explicite simple pour les paramètres canoniques, comme c'est le cas pour ε en codimension 1 (l'équation (3.2.4)).

Si on s'attarde un moment à la codimension 2, il est intéressant de se demander s'il est possible d'utiliser un paramètre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont toutes les deux canoniques. La question est motivée par l'observation suivante. On regarde la famille de polynômes $\{p_c(z) = \bar{z}^2 + c \mid c \in \mathbb{C}\}$ qui dépend d'un paramètre complexe. Dans l'espace des paramètres, il y a une courbe D en forme de deltoïde tel que p_c possède un point fixe parabolique si et seulement si $c \in D$. Aux sommets du deltoïde (les points de rebroussement), p_c possède un point de codimension 2. On note c_0 l'un de ces sommets. En restreignant c à un petit voisinage de c_0 , la famille $\{p_c\}_c$ donne une déformation générique de p_{c_0} . Ceci semble indiquer qu'il n'y a pas de paramètre « superflu » dans le déploiement, comme c'était le cas au chapitre 3.

Pour terminer, on mentionne l'idée d'explorer les conséquences géométriques de l'existence possible de deux ou plusieurs racines antiholomorphes d'un germe parabolique holomorphe ou antiholomorphe. On rappelle que, contrairement au cas holomorphe, il est possible qu'un germe parabolique ait plusieurs racines n -ièmes antiholomorphes distinctes (non équivalentes). Par exemple, si on considère g parabolique holomorphe de codimension k tel que g possède deux racines n -ièmes antiholomorphes distinctes f_1 et f_2 , alors les composées $g_1 := f_1 \circ f_2$ et $g_2 := f_2 \circ f_1$ sont des germes holomorphes. Ils commutent avec g , car f_j commute avec g .

Les germes g_j sont *résonants*, ce qui veut dire que leur multiplicateur est une racine l'unité. Ils sont donc racines d'un germe holomorphe parabolique, mais possiblement de codimension supérieure à k . Les germes résonants n'ont pas été abordés dans cette thèse. Dans cette thèse, on n'a considéré que des germes holomorphes paraboliques qui commutent entre eux. On se propose d'élargir cette étude aux germes résonants.

Bibliographie

- [1] L.V. AHLFORS : *Lectures on Quasiconformal Mappings*. University lecture series. American Mathematical Society, 2006.
- [2] L.V. AHLFORS et L. BERS : Riemann's mapping theorem for variable metrics. *Annals of Mathematics*, 72(2):385–404, 1960.
- [3] A.F. BEARDON : *Iteration of Rational Functions: Complex Analytic Dynamical Systems*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2000.
- [4] L. CARLESON et T.W. GAMELIN : *Complex Dynamics*. Universitext. Springer New York, 2013.
- [5] H.P. CARTAN et R. TAKAHASHI : *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Collection Enseignement des sciences. Hermann, 1961.
- [6] C. CHRISTOPHER et C. ROUSSEAU : The moduli space of germs of generic families of analytic diffeomorphisms unfolding a parabolic fixed point. *International Mathematics Research Notices*, 2014(9):2494–2558, 2014.
- [7] J. ÉCALLE : *Les fonctions résurgentes. Tome III*, volume 85 de *Publications Mathématiques d'Orsay*. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1985.
- [8] L.C. GROVE et C.T. BENSON : *Finite Reflection Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.
- [9] J.H. HUBBARD et D. SCHLEICHER : Multicorns are not path connected. In *Frontiers in complex dynamics*, volume 51 de *Princeton Math. Ser.*, pages 73–102. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2014.
- [10] Y.S. ILYASHENKO : Nonlinear Stokes phenomena. In *Nonlinear Stokes phenomena*, volume 14 de *Adv. Soviet Math.*, pages 1–55. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [11] Y.S. ILYASHENKO et S. YAKOVENKO : *Lectures on Analytic Differential Equations*. Graduate studies in mathematics, v. 86. American Mathematical Society, Providence, R.I., 2008.
- [12] H. INOU et S. MUKHERJEE : Non-landing parameter rays of the multicorns. *Invent. Math.*, 204(3):869–893, 2016.
- [13] O. LEHTO : *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, volume 109 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1987.
- [14] P. MARDEŠIĆ, R. ROUSSARIE et C. ROUSSEAU : Modulus of analytic classification for unfoldings of generic parabolic diffeomorphisms. *Moscow Mathematical Journal*, 4(2):455–502, 2004.
- [15] S. MUKHERJEE, S. NAKANE et D. SCHLEICHER : On multicorns and unicorns II: bifurcations in spaces of antiholomorphic polynomials. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 37(3):859–899, 2017.

- [16] S. NAKANE et D. SCHLEICHER : On multicorns and unicorns. I. Antiholomorphic dynamics, hyperbolic components and real cubic polynomials. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 13(10):2825–2844, 2003.
- [17] R.M. RANGE : *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables*. Graduate texts in mathematics ; 108. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [18] M. SHISHIKURA : Bifurcation of parabolic fixed points. In *The Mandelbrot set, theme and variations*, volume 274 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 325–363. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [19] S. M. VORONIN : Analytic classification of germs of conformal mappings $(C, O) \rightarrow (C, O)$ with identity linear part. *Funct. Anal. Appl.*, 15:1–13, 1981.
- [20] H. ZOLADEK : *The Monodromy Group*. Monografie Matematyczne. Birkhäuser Basel, 2006.

Annexe A

Domaines de translation de Lavaurs continus en $\widehat{\varepsilon}$

Soit g_0 un germe parabolique holomorphe de codimension 1 et soit g_ε une déformation de g_0 . On note le relevé de g_ε sur la coordonnée temps par G_ε , comme à l'habitude. On travaille avec un représentant aussi noté g_ε défini sur $(\varepsilon, z) \in D(0, r') \times D(0, r)$.

Le but est de montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe r et r' assez petits tels que pour tout $\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}$, il est possible de construire un domaine de translation sur les cartes de la coordonnée temps. Voir la section 5.2.4.1 pour un rappel du contexte du problème.

Avant d'énoncer le résultat, on aura besoin de l'estimé suivant : il existe une constante C_G telle que

$$|G_\varepsilon - T_1| \leq C_G \max\{r, r'\}. \quad (\text{A.1})$$

On peut obtenir ce résultat en utilisant la démonstration du lemme 4.1.2 pour F_ε (on ne peut pas utiliser le lemme directement puisque G_ε n'est pas forcément de la forme $F_{\widehat{\varepsilon}} \circ F_\varepsilon$) ou bien on peut consulter [14].

Lemme A.1. *Pour tout $0 < \delta < \pi$, il existe $r, r' > 0$ tels que pour tout $\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi-\delta}$, il est possible de construire des domaines de translation $U_{\widehat{\varepsilon}}^\pm$ dans la coordonnée temps de $Z_{\widehat{\varepsilon}}$.*

Démonstration. Il suffit de faire la preuve pour le cas $U_{\widehat{\varepsilon}}^+$. On rappelle que α_+ est la période définie par

$$\alpha_+ = \frac{i\pi}{\sqrt{\widehat{\varepsilon}}} + i\pi b(\widehat{\varepsilon}).$$

(Voir l'équation (4.1.3) au besoin.) La norme de α_+ est la distance entre les trous sur $U_{\widehat{\varepsilon}}^+$ et l'argument de α_+ , l'angle de la ligne des trous.

Soit $\delta \in (0, \pi)$. On suppose d'ores et déjà que r et r' sont au moins assez petits pour que $|G_\varepsilon - T_1| < \sin(\frac{\delta}{8})$. Le choix de cette borne sera rendu clair à la fin de la démonstration. Dans ce qui suit, on impose davantage de conditions sur r et r' qui nécessiteront potentiellement

que ceux-ci soient encore plus petits afin de s'assurer qu'il est possible de passer une bande entre deux trous consécutifs.

On commence par choisir $r > 0$. D'abord, r doit être assez petit pour que $|G_0 - T_1| \leq \min\{\frac{1}{100}, \sin(\frac{\delta}{8})\} \leq \frac{1}{100}$. Une fois r choisi, alors si $|z| = r$, on a

$$\begin{aligned} |Z| &= \left| -\frac{1}{z} + b \log z \right| \\ &= \frac{1}{|z|} |-1 + bz \log z|. \end{aligned}$$

On peut supposer que $|z| = r$ est assez petit pour que

$$|-1 + bz \log z| \leq 1 + |br \log z| \leq \frac{3}{2}.$$

Sur $|z| = r$, on a alors $|Z| \leq \frac{3}{2r}$. À partir d'ici, r est fixé.

Ensuite, on choisit $r' > 0$. Il faut des estimés sur la distance entre les trous et l'angle de la ligne des trous. Première condition : $\widehat{\varepsilon}$ est choisi assez petit pour que $|Z_\varepsilon - Z| < \frac{1}{2r}$ sur le compact $\{|z| = r\}$. (On rappelle que $Z_\varepsilon \rightarrow Z$ uniformément sur les compacts.) Les trous sont donc inclus dans des boules de rayon $R = \frac{2}{r}$.

La distance entre les centres des boules est

$$|\alpha_+| = \left| \frac{i\pi}{\sqrt{\varepsilon}} (1 + b\sqrt{\varepsilon}) \right|.$$

Deuxième condition : on suppose que r' est assez petit pour que $|1 + b\sqrt{\varepsilon}| > 0,99$. Il s'ensuit que la distance entre les trous est minorée par

$$|\alpha_+| \geq \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}} |1 + b\sqrt{\varepsilon}| > \frac{0,99}{\sqrt{r'}}.$$

Maintenant pour l'angle $\arg \alpha_+$ de la ligne des trous, si $\widehat{\varepsilon} \in \Omega_{\pi, 2\pi - \delta}$, alors l'argument de $\frac{i\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$ est donné par

$$\arg\left(\frac{i\pi}{\sqrt{\widehat{\varepsilon}}}\right) = \arg(i) - \frac{1}{2} \arg(\widehat{\varepsilon}).$$

Puisque $\arg \widehat{\varepsilon} \in (-\pi + \delta, 3\pi - \delta)$, on obtient $|\arg(\frac{i\pi}{\sqrt{\widehat{\varepsilon}}})| \leq \pi - \frac{\delta}{2}$. Deuxième condition : on peut supposer r' assez petit pour que $\arg(1 + b\sqrt{\varepsilon}) \in (-\frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{4})$. En effet, ceci se voit géométrique sur la figure 55. On obtient alors que l'angle de la ligne des trous est borné par

$$|\arg \alpha_+| < \pi - \frac{\delta}{4}.$$

Il reste à passer une bande entre le trou fondamental et un trou adjacent. On choisit une droite dont l'angle avec l'horizontal est $\frac{\pi}{2} + \frac{\arg \alpha_+}{2}$. On note d'abord que la droite n'est jamais horizontale, puisque son angle respecte $\frac{\delta}{8} < \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\arg \alpha_+}{2}\right) < \pi - \frac{\delta}{8}$. Quatrième condition : on

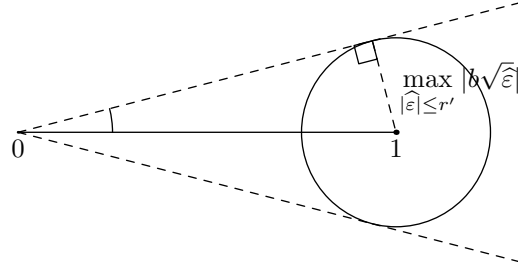


Figure 55. Valeur maximal de $\arg(1 + b\sqrt{\varepsilon})$. Plus r' est petit plus le rayon du cercle diminue.

demande que r' soit assez petit pour que $|\alpha_+| > \frac{4}{r \sin(\frac{\delta}{8})} + 2$. En effet, on veut passer les droites ℓ et $\ell + 2$ comme sur la figure 56. Pour qu'il y ait assez d'espace, on doit avoir

$$|\alpha_+| = x + y + 2 \geq 2y + 2.$$

On voit que

$$y = \frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\arg \alpha_+}{2})} \geq \frac{R}{\sin(\frac{\delta}{8})} = \frac{2}{r \sin(\frac{\delta}{8})},$$

ce qui donne la quatrième condition.

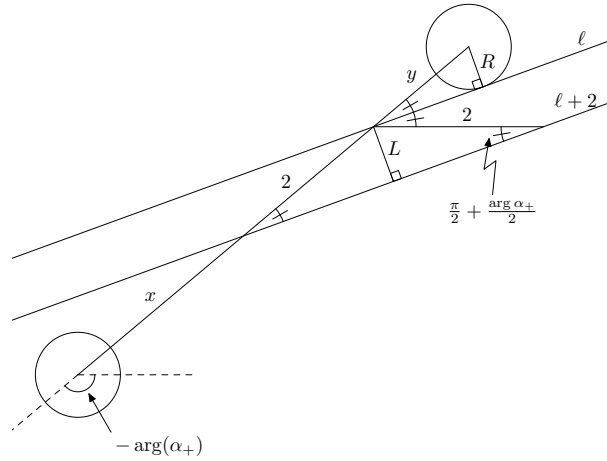


Figure 56. Droite ℓ et $\ell + 2$ dans le cas où $\arg \alpha_+$ est négatif, ainsi que les longueurs x et y qui permettent d'exprimer α_+ et la distance L entre ℓ et $\ell + 2$. (Le signe moins devant $\arg \alpha_+$ est pour représenter l'angle sur la figure comme une quantité positive.)

Enfin, la condition initiale $|G_\varepsilon - T_1| < \sin(\frac{\delta}{8})$ permet de conclure que ℓ et $G_\varepsilon(\ell)$ sont disjointes. En effet, sur la figure 56, on voit que la distance L entre ℓ et $\ell + 2$ est

$$L = 2 \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\arg \alpha_+}{2}\right) \right|.$$

Le minimum est atteint lorsque $\arg \alpha_+ = -\pi + \frac{\delta}{4}$, donc on obtient la condition

$$|G_\varepsilon - T_1| < \min_{\arg \alpha_+} \frac{L}{2} = \sin\left(\frac{\delta}{8}\right).$$

□

Annexe B

Démonstration du corollaire 5.3.11

On rappelle le contexte du corollaire 5.3.11. On a un coefficient de dilatation complexe $\nu_{\rho e^{i\theta}}$ qui dépend des paramètres (ρ, θ) . On suppose que $\|\nu_{\rho e^{i\theta}}\|_\infty \leq k < 1$ et on pose $m_{\rho e^{i\theta}}$ comme la solution normale à l'équation de Beltrami sur S^2 . On suppose de plus que $\nu_{\rho e^{i\theta}}$ possède une dérivée $\nu'_{\rho e^{i\theta}} := \frac{\partial}{\partial \rho} \nu_{\rho e^{i\theta}}$ dans L^∞ et que cette dérivée est continue en (ρ, θ) dans L^∞ . Par le théorème 5.3.10, on sait que $\frac{\partial}{\partial \rho} m_{\rho e^{i\theta}}$ existe, le but est de montrer que cette dernière est continue en (ρ, θ, w) .

Avant de faire la démonstration, on note que dans le livre d'Ahlfors [1], après le théorème 5 du chapitre 5C, il est montré que $\frac{\partial}{\partial \rho} m_{\rho e^{i\theta}}$ est continue en $\rho e^{i\theta}$. Pour obtenir la continuité en (ρ, θ, w) , on peut utiliser la même idée. Toutefois, très peu de détails se trouvent dans le livre, donc on présente une démonstration complète avec tous les détails.

Corollaire 5.3.11. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 5.3.10 (ou voir ci-haut), si $\nu' = \frac{\partial}{\partial \rho} \nu$ est continue par rapport à (ρ, θ) dans L^∞ , alors $\frac{\partial}{\partial \rho} m_{\rho e^{i\theta}}$ est continue en (ρ, θ, w) .*

Démonstration. Soit (ρ_0, θ_0, w_0) , on va montrer la continuité en (ρ, θ, w) en ce point. On pose $m_0 = m(\rho_0, \theta_0, w_0)$ et $m_1 = m(\rho, \theta, w)$ pour alléger. Sans perte de généralité, on peut supposer que $w_0 \neq 0, 1$, sinon une translation en w ramène à ce cas.

La fonction $P(m_{\rho e^{i\theta}}(\cdot), m_0)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{C} \setminus (D(0, r_1) \cup D(1, r_2) \cup D(m_0, r_3))$ pour $r_1, r_2, r_3 > 0$. On peut vérifier sans problème qu'elle est absolument intégrable sur $D(0, r_1)$ et $D(1, r_2)$ également. Le point important est que $P(m_{\rho e^{i\theta}}(\cdot), m_1)$ est absolument intégrable dans un voisinage w_0 et ce, uniformément en m_1 , dans le sens que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|w - w_0| < \delta$ alors

$$\int_{D(w_0, \delta)} \left| \frac{\partial m_{\rho e^{i\theta}}}{\partial w}(\zeta) \right|^2 |P(m_{\rho e^{i\theta}}(\zeta), m_1)| \, i d\zeta d\bar{\zeta} < \varepsilon.$$

En effet, par continuité de m , pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|(\rho, \theta, w) - (\rho_0, \theta_0, w_0)| < \delta$, alors $|m_1 - m_0| < \varepsilon'$. En utilisant le changement de variable $z = m_{\rho e^{i\theta}}(\zeta)$,

on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{D(w_0, \delta)} \left| \frac{\partial m_{\rho e^{i\theta}}}{\partial w}(\zeta) \right|^2 |P(m_{\rho e^{i\theta}}(\zeta), m_1)| \, d\zeta \, d\bar{\zeta} &= \int_{m_{\rho e^{i\theta}}(D(w_0, \delta))} |P(z, m_1)| \, dz \, d\bar{z} \\
&\leq \int_{D(m_0, 2\varepsilon')} |P(z, m_1)| \, dz \, d\bar{z} \\
&\leq \int_{D(m_1, 3\varepsilon')} |P(z, m_1)| \, dz \, d\bar{z} \\
&\leq \frac{(|m_0| + \varepsilon')(|m_0| + \varepsilon' + 1)}{\text{dist}(D, 0)\text{dist}(D, 1)} 18\pi(\varepsilon')^2, \quad (\text{B.1})
\end{aligned}$$

où $D = D(m_1, 3\varepsilon')$, et on choisit ε' assez petit pour que (B.1) soit plus petit que ε . L'argument s'adapte si 0 ou 1 appartient au disque $D(m_{\rho e^{i\theta}}(w'), 2\varepsilon')$: il faut simplement retirer un disque centré en 0 ou 1 aussi petit que nécessaire et l'intégrer à part.

On suppose pour le moment que $\|\nu(\rho, \theta, \cdot)\|_\infty \rightarrow 0$ lorsque $(\rho, \theta) \rightarrow (\rho_0, \theta_0)$ et on montrera le cas général à partir de celui-ci. On note que cela implique que $m_{\rho_0 e^{i\theta_0}} = id$ et $m_0 = m_{\rho_0 e^{i\theta_0}}(w_0) = w_0$. Par le premier lemme du chapitre 5C de [1], on a que

$$\lim_{(\rho, \theta) \rightarrow (\rho_0, \theta_0)} \left\| \frac{\partial m}{\partial w}(\rho, \theta, \cdot) - 1 \right\|_p = 0 \quad (\text{B.2})$$

pour tout $1 \leq p < \infty$.

On voudra majorer $\nu'_{\rho e^{i\theta}}$ dans l'intégrale (5.3.17), on pose donc $N = \sup_{\{|\rho e^{i\theta} - \rho_0 e^{i\theta_0}| < 1\}} \|\nu'_{\rho, \theta}(\cdot)\|_\infty$. Si $N = 0$, alors il n'y a rien à montrer, puisque $\frac{\partial}{\partial \rho} m_{\rho e^{i\theta}} = 0$ sur un voisinage de (ρ_0, ρ_0, w) par unicité de la solution normale à l'équation de Beltrami. On suppose donc que $N \neq 0$ et puisque $\nu'_{\rho e^{i\theta}}$ est continue par rapport à (ρ, θ) dans L^∞ , on a $N < \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit ε' assez petit pour que (B.1) soit plus petit que $\frac{\varepsilon}{6N}$. On note qu'on a $|m_1 - w_0| < \varepsilon'$.

Pour obtenir la continuité, on suppose que $|(\rho, \theta, w) - (\rho_0, \theta_0, w_0)| < \delta' \leq \delta$ et on examine

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial m}{\partial \rho}(\rho, \theta, w) - \frac{\partial m}{\partial \rho}(\rho_0, \theta_0, w_0) \right| &= \left| \int_{\mathbb{C}} \left(\nu'_{\rho e^{i\theta}}(\zeta) P(m_{\rho e^{i\theta}}(\zeta), m_1) \left(\frac{\partial m_{\rho e^{i\theta}}}{\partial w}(\zeta) \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \nu'_{\rho_0 e^{i\theta_0}}(\zeta) P(\zeta, w_0) \right) d\zeta \, d\bar{\zeta} \right|.
\end{aligned}$$

On pose $\frac{\partial}{\partial w} m_{\rho e^{i\theta}} := m'_{\rho e^{i\theta}}$. Sur $D(w_0, \delta)$, par l'inégalité triangulaire et en utilisant (B.1) deux fois et $\|\nu'_{\rho, \theta}\|_\infty \leq N$, on a

$$\left| \int_{D(w_0, \delta)} \left[\nu'_{\rho e^{i\theta}}(\zeta) P(m_{\rho e^{i\theta}}(\zeta), m_1) m'_{\rho e^{i\theta}}(\zeta)^2 - \nu'_{\rho_0 e^{i\theta_0}}(\zeta) P(\zeta, w_0) \right] d\zeta \, d\bar{\zeta} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sur le reste du plan, on remarque que $P(m_{\rho e^{i\theta}}(\cdot), m_1) d\zeta d\bar{\zeta}$ est une mesure finie sur $\mathbb{C} \setminus D(w_0, \delta)$ uniformément bornée pour $m_1 \in D(m_0, 3\varepsilon')$. On a pour $|w - w_0| < \frac{\delta}{2}$

$$\left| \int_{\mathbb{C} \setminus D(w_0, \delta)} \left[\nu'_{\rho e^{i\theta}}(\zeta) P(m_{\rho e^{i\theta}}(\zeta), m_1) m'_{\rho e^{i\theta}}(\zeta)^2 - \nu'_{\rho_0 e^{i\theta_0}}(\zeta) P(\zeta, w_0) \right] d\zeta d\bar{\zeta} \right| \quad (\text{B.3})$$

$$\leq \int_{\mathbb{C} \setminus D(w_0, \delta)} \left| \nu'_{\rho e^{i\theta}}(\zeta) P(m_{\rho e^{i\theta}}(\zeta), m_1) m'_{\rho e^{i\theta}}(\zeta)^2 - \nu'_{\rho_0 e^{i\theta_0}}(\zeta) P(m_{\rho e^{i\theta}}(\zeta), m_1) \right| id\zeta d\bar{\zeta} \quad (\text{B.4})$$

$$+ \int_{\mathbb{C} \setminus D(w_0, \delta)} \left| \nu'_{\rho e^{i\theta}}(\zeta) P(m_{\rho e^{i\theta}}(\zeta), m_1) - \nu'_{\rho_0 e^{i\theta_0}}(\zeta) P(\zeta, w_0) \right| id\zeta d\bar{\zeta}. \quad (\text{B.5})$$

Pour l'intégrale (B.4), on a

$$\int_{\mathbb{C} \setminus D(w_0, \delta)} \left| m'_{\rho e^{i\theta}}(\zeta)^2 - 1 \right| \left| \nu'_{\rho e^{i\theta}}(\zeta) P(m_{\rho e^{i\theta}}(\zeta), m_1) \right| id\zeta d\bar{\zeta} \rightarrow 0,$$

lorsque $(\rho, \theta, w) \rightarrow (\rho_0, \theta_0, w_0)$, car $\|m'_{\rho e^{i\theta}}(\cdot)^2 - 1\|_1 \rightarrow 0$ et la mesure est uniformément bornée. L'intégrale (B.5) tend vers 0 par le théorème de la convergence dominée, puisque $P(m_{\rho e^{i\theta}}(\cdot), m_1)$ est dans $L^1(\mathbb{C} \setminus D(w_0, \delta))$ pour tout (ρ, θ, w) près de (ρ_0, θ_0, w_0) et $\nu'_{\rho e^{i\theta}}$ dans L^∞ . Ainsi, si $|(\rho, \theta, w) - (\rho_0, \theta_0, w_0)|$ est assez petit, on a que l'intégrale (B.3) est plus petite que $\frac{\varepsilon}{2}$, d'où m est continue en (ρ_0, θ_0, w_0) .

Il reste à montrer le cas général, c'est-à-dire le cas où $\nu(\rho, \theta, \cdot) \rightarrow \nu(\rho_0, \theta_0, \cdot) =: \nu_0(\cdot)$ dans L^∞ . On pose $\nu(\rho, \theta, \cdot) := \nu$ et

$$\omega = \left[\frac{\nu - \nu_0}{1 - \nu \bar{\nu}_0} \left(\frac{\partial m_{\rho_0 e^{i\theta_0}}}{\partial w} \middle/ \frac{\partial \bar{m}_{\rho_0 e^{i\theta_0}}}{\partial \bar{w}} \right) \right] \circ (m_{\rho_0 e^{i\theta_0}})^{-1}.$$

(On rappelle que $m_{\rho_0 e^{i\theta_0}}$ est la solution normale de l'équation de Beltrami en ν_0 .) On voit que $\omega \rightarrow 0$ dans L^∞ lorsque $(\rho, \theta) \rightarrow (\rho_0, \theta_0)$. Soit \tilde{m} la solution normale à l'équation de Beltrami par rapport à ω . Alors on a (voir le livre d'Ahlfors chap. 1C ou chap. 5B)

$$m_{\rho e^{i\theta}} = \tilde{m} \circ m_{\rho_0 e^{i\theta_0}}.$$

Comme $\tilde{m}|_{\rho e^{i\theta} = \rho_0 e^{i\theta_0}} = id$, par ce qui précède, $\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{m}$ est continue, donc on peut en conclure de même pour $\frac{\partial}{\partial \rho} m_{\rho e^{i\theta}}$.

□